THE TEACHING OF MATHEMATICS
2007, Vol. X, 1, pp. 37–50

НЕКОТОРЫЕ ДИДАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И УНИВЕРСИТЕТАХ

Б. Лазаров, А. Василева

Abstract. Possibilities of applying professional software packages in teaching of mathematics to upper high school students, as well as first grade universities students of technical and economy faculties are presented. A new paradigm of teaching of mathematics is discussed. Some examples are given.

ZDM Subject Classification: U54; *AMS Subject Classification*: 00A35.

Key words and phrases: Professional software packages, MATHEMATICA.

О начальном статусе преподавания высшей математики

Первое, что нам надо объяснить – это можно ли объединять в одну группу старшеклассников средней школы и первокурсников университетов в контексте математического образования. Наш ответ положительный, и это становится понятным, если учесть, что математическая подготовка первокурсников университетов является продуктом математического образования в средней школе. Другим доводом в пользу такого мнения служит сравнение программ одиннадцатого и двенадцатого классов средней школы и программ по математике первых двух семестров технических и экономических университетов. Это то время, когда обучаемые впервые встречаются с так называемой высшей математикой.

Но, скорее всего, объединенное рассмотрение двух групп обучаемых вызвано сходными проблемами, которые возникают у школьников и студентов при изучении основных структур математики. Здесь всплывают все пробелы в обучении прежних лет. Иногда они такие большие, что преподаватель трудно себе представить, как провести обучение. Еще хуже приходится обучаемым, которые, несмотря на внутренную мотивацию освоить какою-то раздел учебного содержания, не успевают продвинуться ни на шаг вперед.

Проблема в том, что изучение математики является в какой-то степени непрерывным процессом, который предполагает какую-то непрерывность и последовательность не только в изложении, но в еще большей степени в освоении уже пройденного материала. К сожалению, последнее очень редко удается осуществить. Большая часть школьников и студентов не имеют прочную основу математических знаний, умений и навыков (ЗУН). Более того, у значительной части школьников и студентов уже сформированные ЗУН вместе со смесью определенных логических схем мышления сформировали конгломерат псевдо-математики, в котором очень трудно, а иногда и невозможно, выделить рациональное ядро, возле которого можно надстраивать новый объем математических ЗУН.

Достаточно полное исследование этих проблем на примере понятий связанных с числами проведено в Финляндии [1]. Отмечено, что знание обучаемых состоит из «кусков», связь между которыми плохая. Отмечено, что для большей части обучаемых нужна дополнительная помощь. Еще установлено, что развитие отдельных компонент знаний можно осуществлять независимо друг от друга.

Необходимость в новой парадигме преподавания начал высшей математики

Все то, о чем говорилось, приводит к необходимости принятия такой парадигмы математического образования, которая учитывала бы разрозненность и неполноту математических знаний, минимальные и ненадежные умения, частичную или в большой степени полную нехватку математических навыков, в том числе навыков математического мышления. Здесь мы имеем в виду математическое образование, в основе которого лежит решение задач.

Какая модель могла бы описывать преподавание математики в упомянутых условиях? По нашему мнению, подходящую модель следовало бы строить на концепции «островного» типа. Прежде всего это вытекает из модульной структуры учебного содержания – из «островов». Школьники изучают новые математические понятия, методы и структуры как можно более независимо друг от друга. При этом связи между понятиями сводятся к «наведений мостов» между отдельными «островами». Если для продвижений в рамках одного «острова» необходимо применение каких-то результатов из другого «острова», то такое применение делается без углубления в детали, только отмечая самое основное в виде алгоритма.

Модель, однако, должна быть применимой и для обучения школьников и студентов, у которых есть та хорошая основа ЗУН-ов, которая позволяет им идти вперед нормальными темпами. Процесс обучения таких школьников и студентов должен предоставлять им возможность для углубленного изучения учебного материала, а также возможность творческого применения ЗУН-ов для совершения математических открытий.

Поиск возможного выхода из парадоксальной ситуации

Кажется, что проблема, сформулированная выше, неразрешима – у нас тоже нет на нее решения. Здесь мы предлагаем одно возможное направление, в котором у нас уже накопились некоторые наблюдения и опыт. Надо сразу сказать, что исследования мы не проводили, а заключения мы делали, основываясь именно на наших наблюдениях в процессе обучения студентов первого курса одного из болгарских технических университетов. Поэтому иногда в качестве аргументов будем ссылаться на чужой опыт. Тем не менее, проблема так значима, что на наш взгляд стоит обсуждать всякое нахождение даже частичных решений. Здесь мы хотели бы поделиться некоторыми идеями о поиске решения этой проблемы путем применения профессиональных программных пакетов (ППП). Под этим мы имеем в виду пакеты вроде MATHEMATICA, MAPLE и т.п.

Чем отличается ППП от учебного программного продукта? Четкую границу, кажется, провести нельзя. Может быть, основная разница состоит в целых применения – ППП обслуживает как правило широкий спектр узкопрофессиональных целей, а учебный софтвер имеет дидактическую направленность. Те ППП, которые мы имеем в виду, отличаются еще синтаксисом, близким к обычным математическим обозначениям, принятым в учебниках. Кроме того, как правило, все, что может понадобиться потребитель, дано в примерах. Таким образом, школьник или студент может сразу начать применять ППП путем 'copy-paste', делая небольшие изменения в уже работающих примерах. Далее мы еще вернемся к этой теме.

Каким образом и где можно пользоваться ППП

Возможная зона применения на наш взгляд – это индивидуальная работа школьников и студентов. Но чтобы продемонстрировать как можно больше возможностей ППП, полезно время от времени пользоваться ППП для иллюстративных целей в групповой работе.

Поэтому и мы сначала рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие возможности профессиональных программных пакетов (ППП) начиная именно с возможностей иллюстративного характера. Под этим мы имеем в виду пакеты вроде MATHEMATICA, MAPLE и т.п.

ППП как иллюстратор

Правильное введение математического понятия очень важно для его понимания и применения обучаемым. В основном есть два метода введения: начать с формального определения, а потом давать примеры, или начать с примеров и прийти к понятию. Иллюстрировать понятие на визуальном уровне в рамках одной лекции было люксом, который раньше преподаватели могли себе позволить лишь в редких случаях. Теперь применение ППП позволяет делать это легко и быстро.

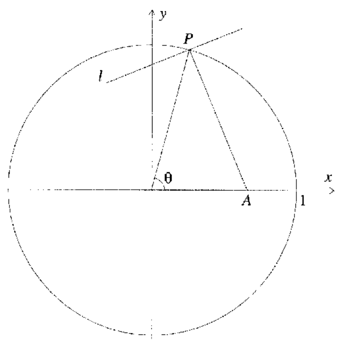
Пример 1. Дана неподвижная точка $A(a;0)$, $0 < a < 1$, и точка $P(\cos\theta, \sin\theta)$, которая при изменении θ описывает окружность радиуса 1. Через P проведен перпендикуляр l к AP. Какая линия является огибающей прямых l?

В этом примере легко подсчитать угловой коэффициент прямой AP, после чего и угловой коэффициент l (сл. 1). Потом можно сразу выписать декартовое уравнение l:

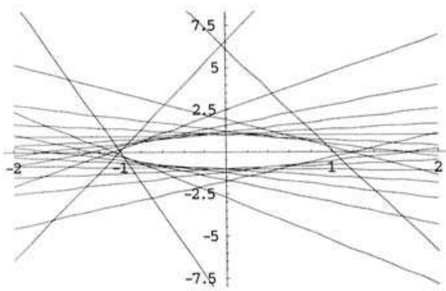
$$y - \sin\theta = \frac{a - \cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta).$$

Отсюда получается семейство прямых

$$F = \{\, (a - \cos\theta)x - (\sin\theta)y + (1 - \cos\theta) = 0 : \theta \in [0, 2\pi) \,\},$$



Сл. 1

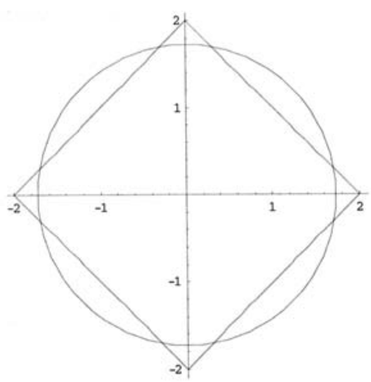


Сл. 2

чью огибающую требуется найти в задаче. Применяя пакет MATHEMATICA, можно легко начертить столько прямых из семейства F, сколько нужно, чтобы получить ясное представление об их огибающей (сл. 2).

```
In[1]:= a=1/2;
        Show[Table[Plot[Sin[θ]+(a-Cos[θ])/
        Sin[θ](x-Cos[θ]),{x,-2,2}],{θ,Pi/24,23 Pi/12,Pi/12}]]
```

Из чертежа видно, что огибающая похожа на эллипс. Далее эту гипотезу можно проверить тоже используя ППП.



Сл. 3

Здесь мы хотим прокомментировать использование ППП для иллюстративных целей еще одним примером.

Пример 2. Сколько (действительных) решении имеет система

$$x^2 + y^2 = 3, \quad |x| + |y| = 2\,?$$

Пакетом MATHEMATICA графическое представление можно осуществить двумя командами:

```
In[1]:= Show[
        ImplicitPlot[x^2+y^2==3,{x,-3,3},{y,-3,3}],
        ImplicitPlot[Abs[x]+Abs[y]==2,{x,-3,3},{y,-3,3},
        AxesOrigin->{0,0}]]
```

Сейчас чертеж естественным образом приводит нас к обобщению в виде следующей задачи.

Пример 2-1. Сколько (действительных) решений имеет система

$$x^2 + y^2 = 1, \quad |x| + |y| = a,$$

в которой $a > 0$ является параметром?

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x = \cos\theta, & y = \sin\theta, \\ x = a\cos^2\theta, & y = a\sin^2\theta. \end{cases}$$

Здесь хотелось бы найти более общую формулировку задачи, например переходя к системе

$$\begin{cases} x = \cos\theta, & y = \sin\theta, \\ x = a\cos^{2a}\theta, & y = a\sin^{2a}\theta. \end{cases}$$

или даже к системе с двумя параметрами

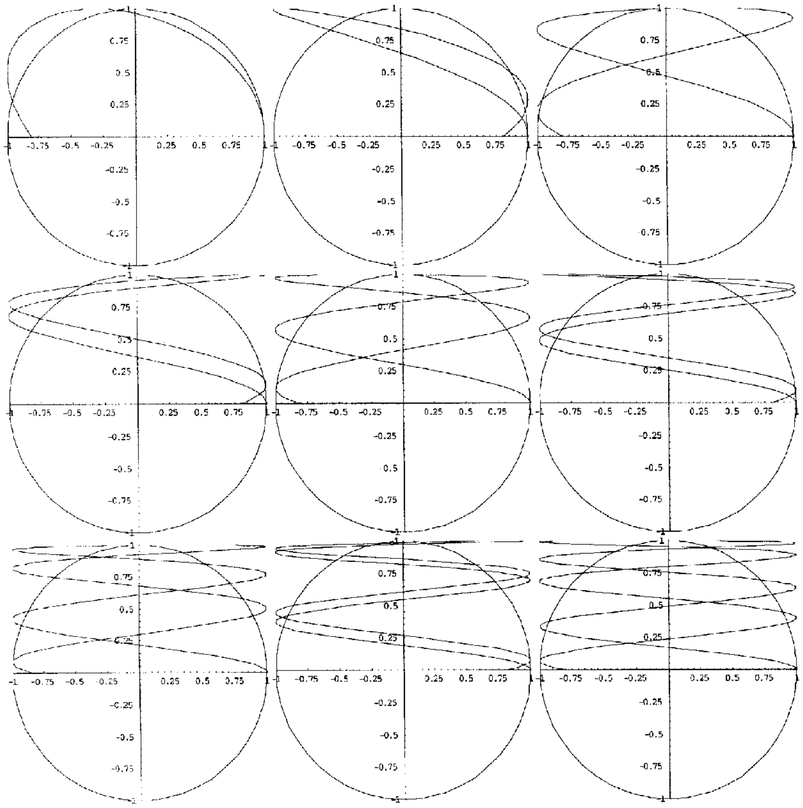
$$\begin{cases} x = \cos\theta, & y = \sin\theta, \\ x = a\cos a\theta, & y = a\sin b\theta. \end{cases}$$

Такие желания легко удовлетворять, тем более что для вычерчивания разных графиков нужно менять лишь одну букву в уже созданной программе. Здесь мы приводим несколько таких графиков.

```
In[1]:=a=1.2;
        b=1;
        While[a<10,
          p0=ParametricPlot[{(Cos[t]),(Sin[t])},{t,0,2*Pi},
          AspectRatio->1,PlotRange->{{-1,1},{-1,1}},
          DisplayFunction->Identity];
        p1=ParametricPlot[{(Cos[a*t]),(Sin[b*t])},{t,0, 2*Pi},
        AspectRatio->1,PlotRange->{{-1,1},{-1,1}},
        DisplayFunction->Identity];
          Show[p0,p1,DisplayFunction->DisplayFunction];
          a=a+1;]
```

Надо сразу отметить, что эта программа на самом деле мало отличается от программы в примере 1. В нее добавлено несколько операторов для определения положения чертежа, без которых можно обойтись. А вот и чертежи (сл. 4).

Но обратим внимание и на другой аспект поисков обобщений. Идя по пути вопросов «а что, если … » иногда можно перейти от содержательной задачи к игре, которая быстро надоедает – и в результате позитивный эффект для обучения будет утерян. Удобство применять ППП в иллюстративных целях может легко привести к перегрузке учебного процесса иллюстрациями.



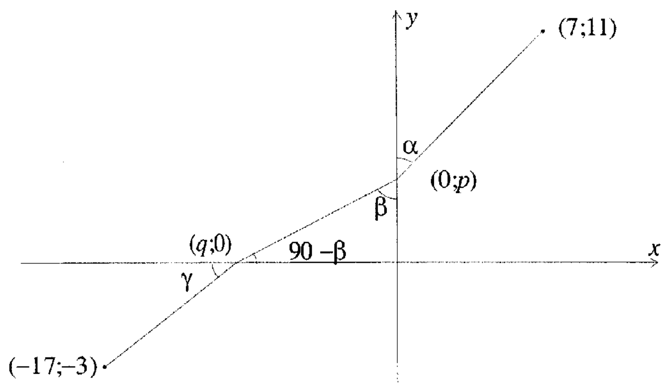
Сл. 4

ППП как калькулятор

Конечно, мы имеем в виду не применение ППП как карманный калькулятор, а те возможности, которые предоставляет ППП для проведения «буквенных вычислений». Как правило, конечный результат во многих прикладных задачах получается после большого количества вычислений. Иногда основная идея задачи остается спрятанной за ними. Чтобы не отвлекаться от сушности конкретной задачи, лучше было бы «предоставить» часть вычислений ППП. Рассмотрим

Пример 3. Находясь в координатной плоскости, жук хочет пройти из точки $(7;11)$ в точку $(-17;-3)$. Скорость жука равна 1 ед./сек везде, кроме второго квадранта, где она равна $\frac{1}{2}$ ед./сек. По какой траектории должен передвигаться жук, чтобы совершить указанный переход за кратчайшее время?

Будем пользоваться обозначениями на чертеже (сл. 5), где $(0;p)$ и $(q;0)$ – точки, в которых жук пересекает соответствующие координатные оси. В данном случае проще всего вместо жука рассмотреть световой луч, который как известно, проходит от первой точки во вторую по «пути кратчайшего времени». Применяя



Сл. 5

к нему закон преломления $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{v_a}{v_b}$, в результате получаем систему уравнений

$$\frac{11-p}{\sqrt{49+(11-p)^2}} = \frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$
$$\frac{17+q}{\sqrt{9+(17+q)^2}} = \frac{-2q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

На решение такой системы «карандашом» уходит очень много времени. Кроме того, в задаче основная идея уже намечена и остается только рутинная работа и некоторое истолкование конечного результата. Чтобы не терять инерции, было бы удачно применить ППП.

```
In[1]:=Solve[(11-p)/Sqrt[49+(11-p)^2]==2*p/Sqrt[p^2+q^2],q]
```

Out[1]= $\left\{\left\{q \to -\sqrt{196+\dfrac{23716}{(11-p)^2}-\dfrac{4312}{11-p}+3p^2}\right\},\left\{q \to \sqrt{196+\dfrac{23716}{(11-p)^2}-\dfrac{4312}{11-p}+3p^2}\right\}\right\}$

```
In[2]:= Simplify[%]
```

Out[2]= $\left\{\left\{q \to -\sqrt{\dfrac{p^2(559-66p+3p^2)}{(-11+p)^2}}\right\},\left\{q \to \sqrt{\dfrac{p^2(559-66p+3p^2)}{(-11+p)^2}}\right\}\right\}$

```
In[3]:= Solve[(17+q)/Sqrt[9+(17+q)^2]==-2 q/Sqrt[p^2+q^2],p]
```

Out[3]= $\left\{\left\{p \to -\sqrt{3}\sqrt{12+q^2+\dfrac{3468}{(17+q)^2}-\dfrac{408}{17+q}}\right\},\left\{p \to \sqrt{3}\sqrt{12+q^2+\dfrac{3468}{(17+q)^2}-\dfrac{408}{17+q}}\right\}\right\}$

```
In[4]:=Simplify[%]
```

Out[4]= $\left\{\left\{p \to -\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{q^2(301+34q+q^2)}{(17+q)^2}}\right\},\left\{p \to \sqrt{3}\sqrt{\dfrac{q^2(301+34q+q^2)}{(17+q)^2}}\right\}\right\}$

$$\texttt{In[5]:=NSolve}\left[\left\{p == \sqrt{3}\sqrt{12+q^2+\frac{3468}{(17+q)^2}-\frac{408}{17+q}},\right.\right.$$
$$\left.\left. q == -\sqrt{196+\frac{23716}{(11-p)^2}-\frac{4312}{11-p}+3p^2}\right\}, \{p,q\}\right]$$

```
Out[5]= {{p->12.6925 -9.03334i,q->-16.5371+3.78341i},
        {p->12.6925 +9.03334i,q->-16.5371-3.78341i},
        {p->12.7863 -7.64132i,q->-17.4056-3.43461i},
        {p->12.7863 +7.64132i,q->-17.4056+3.43461i},
        {p->5.58795 -0.670917i,q->-17.0108+3.52537i},
        {p->5.58795 +0.670917i,q->-17.0108-3.52537i},
        {p->11.0302 -8.54055i,q->-6.31881+4.59303i},
        {p->11.0302 +8.54055i,q->-6.31881-4.59303i},
        {p->0.,q->0.},{p->0.,q->0.},{p->0.,q->0.}}
```

Конечно, умения проводить алгебраические преобразования являются неотъемлемой частью математической грамотности. Но в то же время, когда момент для формирования таких умений упущен, нужно искать пути для продвижения обходясь без них. С другой стороны, те грамотные школьники и студенты, для которых преобразования алгебраических выражений в принципе не являются проблемой, могут сосредоточить свое внимание на более содержательных сторонах обсуждаемой задачи. Таким образом, применение ППП как бы уравнивает статус обучаемых по отношению к конкретной задаче (а хорошо ли это?).

ППП как средство генерирования и проверки гипотез

В какой-то степени применение ППП как средство для выдвижения и проверки гипотез связано с возможностью проиллюстрировать некоторые свойства математических объектов (ППП как иллюстратор) и потом произвести вычисления, которые подтверждают эти свойства (ППП как калькулятор). Разница в том, что целевая группа обучаемых сейчас другая – формулировать и проверять математические гипотезы могут прежде всего школьники и студенты, которые хорошо владеют и глубоко понимают учебный материал. Здесь мы рассмотрим еще два примера, на этот раз из болгарской школьной программы [2].

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{4^{\sin^2 \frac{\pi}{4}x} + 4^{\cos^2 \frac{\pi}{4}x}} = -x^2+2x+1.$

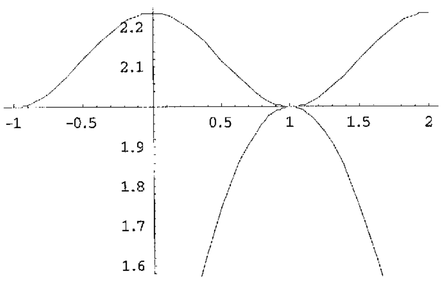
Эта задача была дана в 2002 г. на выпускном экзамене при окончании средней школы. Поскольку общего метода точного решений таких уравнений не существует, они не являются предметом самостоятельного изучения. Составители экзаменационного билета имели в виду нахождение и сравнение экстремальных значений функций в левой и правой сторонах заданного уравнения. Мы здесь не будем комментировать как школьник должен был бы поступить в условии экзамена. Однако, рассматривая такую задачу на уроке, ему было бы легче, если бы он располагал графиками этих двух функций. Но построение графика функции в левой стороне на практике невозможно традиционным способом. Поэтому можно применить ППП.

```
In[1]:= f=Sqrt[4^((Sin[(Pi/4) x])^2)+4^((Cos[(Pi/4) x])^2)]
In[2]:= g=-x^2+2x+1
In[3]:= Plot[{f,g},{x,-1,2}]
```

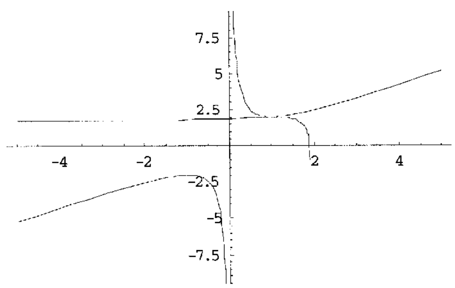
Имея графики перед собой (сл. 6), школьнику нетрудно выдвинуть гипотезу, что решение надо искать, сравнивая экстремальные значения функции, т.е. он может составить следующий план действия:

- Найти минимум f_{min} функции $f(x) = \sqrt{4^{\sin^2 \frac{\pi}{4}x} + 4^{\cos^2 \frac{\pi}{4}x}}$.
- Найти максимум g_{max} функции $g(x) = -x^2 + 2x + 1$.
- Указать корень уравнения $f(x) = g(x)$ сравнивая f_{min} и g_{max}.

Такой план был указан в условии задачи на вступительном экзамене одного из болгарских университетов [3].



Сл. 6



Сл. 7

Пример 5. Решить уравнение $\log_5(16 + 2 \cdot 3^{x+1} - 9^x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Применение ППП для рассмотрения примера 5 уже является рутинным заданием:

- Иллюстрация(сл. 7):

```
In[1]:= f=Log[5,16+2*3^(x+1)-9^x]
In[2]:= g=(x^2+1)/x
In[3]:= Plot[{f,g},{x,-5,5}]
```

- Гипотеза: корень есть точка, в которой достигаются f_{min} и g_{max}, наверное это $x = 1$.
- Проверка:

```
In[4]:= FindRoot[f==g,{x,0.5}]
Out[4]= {x->0.999142}
```

Наш опыт в применении ППП

Как уже упоминалось выше, наш опыт в применении ППП не такой уж большой. Все-таки поделимся им:

- Учебное содержание преподносится обычным способом во время лекции, в максимально упрощенном виде, пользуясь прежде всего алгоритмическими методами.
- На семинарных занятиях студентам решается пример. В процессе решения отмечаются те шаги, в которых введено новое содержание и подчеркиваются части пройденного материала, которые предполагаются знакомые им.
- Потом студентам предлагается решить самим задачу, аналогичную рассмотренному выше примеру. Наблюдая за ними, отмечаем пробелы в знаниях и умениях пройденного материала.
- Предлагаем студентам воспользоваться ППП при решении задач на самоподготовку в тех местах, в которых мы считаем, что ППП можно применять легко, извлекая при этом значительную пользу для получения решения.

Покажем на примере как работает эта схема. Уточняем, что так как мы не делали статистических исследований, назвать описанную процедуру дидактической технологией пока нельзя.

Пример 6. Решить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$

`In[1]:= PolynomialQuotient[x^4+x+1,x^3+4x^2+6x+4,x]`

`Out[1]=` $-4+x$

`In[2]:= PolynomialRemainder[x^4+x+1,x^3+4x^2+6x+4,x]`

`Out[2]=` $17+21x+10x^2$

`In[3]:= Factor[x^3+4x^2+6x+4]`

`Out[1]=` $(2+x)(2+2x+x^2)$

`In[4]:= Expand[A(2+2x+x^2)+(Bx+C)(2+x)]`

`Out[4]=` $2A+2Bx+2C+2Ax+Bxx+Cx+Ax^2$

`In[5]:= Solve[{A+B 10,2B+2A+C 21,2A+2C 17},{A,B,C}]`

`Out[5]=` $\left\{\left\{A\to\frac{15}{2},B\to\frac{5}{2},C\to 1\right\}\right\}$

`In[6]:= Integrate[(x^4+x+1)/(x^3+4x^2+6x+4),x]`

`Out[6]=` $-4x+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\,\mathrm{ArcTan}[1+x]+\frac{15}{2}\,\mathrm{Log}[2+x]+\frac{5}{4}\,\mathrm{Log}[2+2x+x^2]$

Преимущества, которые на наш взгляд дает применение ППП

Мы не собираемся обсуждать здесь преимущества, которые дает применение ППП для студентов старших курсов. Только упомянем, что использовать ППП для исследовательской деятельности после третьего курса – общепринятая практика в университетах. Преимущества раннего введения ППП в процесс обучений можно искать по крайней мере в двух направлениях.

Первое направление связано с преподаванием математики. Ниже упомянем некоторые пункты, в которых преподаватель может извлечь пользу из применения ППП.

1. Есть возможность осуществлять все-таки обучение студентов и школьников с большими пробелами в знаниях путем решения задач или скорее математической деятельности. Несмотря на относительно низкую эффективность такого обучения, обучаемым можно продемонстрировать большое количество методов с надеждой, что пользуясь ППП они смогут применять некоторые из этих методов. Нужно отметить, что для нас пока нет альтернативной системы обучения, которая гарантировала бы какие-либо результать для студентов и школьников с большими пробелами в математической подготовке.

2. Есть возможность (по крайней мере, теоретическая) осуществлять совместное обучение студентов и школьников с большой разницей между их математическими ЗУН-ами. При этом можно применять дифференцированный подход – инструкциональный или творческий.

3. Можно осуществлять *обучение синтаксисом.* С одной стороны синтаксис ППП очень похож на обычные математические записи. С другой стороны сам синтаксис ППП требует некоторого понимания основных понятий. В качестве примера рассмотрим построение графиков функций. Команда пакета MATHEMATICA требует ввести не только формулу, задающую функцию, но еще указать аргумент и область определения функции. Обучение синтаксисом еще не исследованная область, у которой есть большой потенциал для развития преподавания математики.

4. Есть возможность гибкого изложения учебного материала, пользуясь иллюстрациями и обходя громоздкие вычисления.

5. Появляется возможность рассматривать математические вопросы, которые в недалеком прошлом изучались в математических спецкурсах университетов (например, общие методы решения трансцендентных уравнений).

Второе направление, в котором можно искать преимущества раннего введения ППП, связано с обучаемыми. Вот некоторые наши наблюдения.

1. Применение ППП может иметь серьезный положительный эффект среди школьников с повышенным интересом к углубленному изучению математики. Им можно ставить дополнительные задачи на исследование.

2. Информационная перегрузка учеников и студентов снижается за счет несложного синтаксиса ППП. Чтобы применыть ППП не надо выучивать его язык, а только надо смотреть на туториал и копировать команды copy-paste образом.

3. Возможность обходить громоздкие вычисления дает школьникам и студентам с пробелами в матподготовке шанс на более полноценное участие в процессе обучения. Чтобы «решать» задачи им нужно только следовать соответствующим инструкциям.

4. Студентам старших курсов, у которых уже имелась возможность пользоваться тем же самым ППП, легче пойти дальше в применении пакета для решения конкретных задач, связанных с их будущей профессиональной реализацией.

Применение ППП дает возможность пользоваться почти всеми преимуществами обучающих программ. В том числе предоставляет возможность школьникам и студентам, проявляющим больший интерес к углубленному изучению математики, пойти далеко в рассмотрении конкретных частных проблем, делать обобщения, выдвигать гипотезы, проверять их и т.д. Так как центральным понятием в курсе так называемой высшей математики является функция, большие возможности ППП в проведении всяких операций с функциями делают из ППП инструмент с широким спектром в обучении. Отметим некоторые из обеспечиваемых ППП возможностей.

- Построение графиков функций, избегая при этом большие сопровождающие вычисления.
- Исследование функций на монотонность, нахождение экстремумов и т.д.
- Возможность изучения поведения функций, далеко выходящих за рамки учебного содержания.

В случае рассмотренных выше задач на решение трансцендентных уравнений:

1. Использование ППП дало возможность обойти громоздкую процедуру построения графика функции.

2. Наблюдение за поведением функции, представленной своим графиком, дает возможность школьникам сразу перейти к сравнению экстремальных значений. Как раз это не рассмотрено достаточно подробно в учебниках и нельзя ожидать, что школьники легко догадались бы как это сделать.

3. Та легкость, с которой были решены обе задачи и тот факт, что в недалеком прошлом они были предметом специализированных научных исследований, являются предпосылкой зарождения продолжительного интереса у школьников.

Таким образом, применение ППП может иметь сильное психологическое воздействие на школьников, которые уже выбрали профессиональную реализацию в области науки, техники, экономики.

Недостатки

Работа с ППП не является частью учебного содержания по математике и информатике в средней школе. Вдобавок само приобретение такого пакета стоит недешево. Но приобретение ППП не является самой большой проблемой. Такой может быть наличие (скорее всего отсутствие) квалифицированных кадров. Вот некоторые требования, которым, на наш взгляд, должен удовлетворять преподаватель, который хочет применять в своей педагогической практике ППП.

- Компьютерная грамотность на нужном уровне.
- Гибкость в приложении стандартов обучения.
- Концептуальное понимание ядра учебного содержания.
- Полное умение выполнять основные действия в процессе обучения.

- Стратегическая компетентность в планировании эффективных инструкций и умение решать проблемы, возникающие в процессе обучения.
- Адаптивное обоснование логической структуры решения задач.
- Позитивное отношение к математике, к преподаваний и к самосовершенствованию.

Строгие требования к преподавателю являются жестким ограничением в возможности применения ППП. Как найти достаточно много таких преподавателей мы не знаем. Но выпускники педагогических университетов, которые уже пользовались ППП в процессе обучения, на наш взгляд могут стать пионерами в разработке и применении новых методик.

Но у применений ППП есть и другой аспект. Студенты и школьники тратят меньше интеллектуальной энергии и практически «не переживают» решение задач. В этом смысле не исследована проблема, в какой степени применение ППП может помешать созданию компетенции у обучаемых.

Заключение

Сегодня идет огромный по масштабам поиск путей для применения компьютерных технологии в образовании. К сожалению, новая информационная среда не привела к скачку в образовании, даже наоборот. В математическом образовании все сильнее проявляются негативные стороны информационного хаоса. В конце шестидесятых и начале семидесятых годов в США была выдвинута идея об обучение наблюдением – так называемым 'sight-seeing' [5]. Суть этой идеи сводится к свободе индивидуума изучая мир, проводить некоторое исследование, и наряду с этим к возможности опускать то, что ему не хочется исследовать, и выбирать когда и где позабавляться в ходе исследования. Наверное, это связано с «телевизионным поколением», которое в Болгарии выросло в 80-90 годов прошлого века. Но в начале нового века на смену «наблюдающих» молодых людей пришло поколение «серфирующих», которые создали какую-то свою «клик-методику» для изучения мира. Те «старые» методики обучения, которые строились на основе второй сигнальной системы, несовместимы с «клик-методикой». Может быть, кликая можно изучать мир, но невозможно изучать математику в том смысле, как это понималось в двадцатом веке. С другой стороны, как противодействие хаосу, нарастает необходимость в структурированном, математическом взгляде на действительность. Может быть, применение ППП в обучении помешает (или по крайней мере замедлить) заменить существующий хороший классический монумент математики на клик-математику.

Замечание. Авторы благодарны Лиду и Йордану Табовым о полезних рекоммендациях, которые улучшили текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Merenluoto, K., Lehtinen, E., *The Quality of Conceptual Change in Mathematics*, Nordisk Matematikkdidaktikk, **9**, 2, 158.

2. Лазаров, Б., *Числено решаване на трансцендентни уравнения*, Юбилейна сесия на сп. «Стратегии», София, февруари 2003 г.

3. Лазаров, Б., Газета «ГИМНАЗИСТ», **17**, 2001.

4. Kanchev, K., Lazarov, B., *Solving Nonlinear Equations via Mathematica-4*, Mathematics and Informatics Quarterly, **13**, 1/2, 2003.

5. Oppenheimer, F., *A rationale for a science museum*, Currator, **11** (1968), 208–211.

Институт математики и информатики Болгарской АН, ул акад. Г. Бончев, бл. 8, 1113 София, Болгария

E-mail: `byl@abv.bg`