THE TEACHING OF MATHEMATICS
2010, Vol. XIII, 2, pp. 93–104

ZUR INTEGRATION DER HYPERBELFUNKTION

Jörg Meyer

Abstract. This is about several ways how to integrate the hyperbola function (not using the chain rule). Some ways may be not so common.

This article is not about new mathematical results, but focusses on several ways while always keeping in mind the students' perspective. From a purely mathematical point of view, the article could be read as proposing several alternatives on how to define $\exp(x)$ or $\ln(x)$, but this would not be the author's intention. He argues from the students' view, so this article is about several alternatives on how to obtain the area under the hyperbola function.

At the end, the relation of $\ln 2$ to the harmonic series will be discussed.

ZDM Subject Classification: I25, I55; *AMS Subject Classification*: 97I20, 97I50.

Key words and phrases: Hyperbola; integration.

0. Einleitung

Die von Archimedes vorgenommene "Quadratur der Parabel" (genauer: Integration der Parabelfunktion; die ungenaue Kurzbezeichnung ist in der Literatur üblich) war ein erster Meilenstein in der Geschichte der Integralrechnung.

Die wohl von Gregorius von Sanct Vicentius (1584–1667; sein Name wird unterschiedlich geschrieben) erstmalig gelungene "Quadratur der Hyperbel" war zwar noch kein solcher Meilenstein, bereitete aber die bahnbrechende Erkenntnis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durch Isaac Barrow (1630–1677) mit vor. Historische Anmerkungen hierzu finden sich etwa bei Kline [1, S. 354], weiter ausholend bei Toeplitz [9, S. 53 f. uns S. 91 f.] oder (noch weiter ausholend) bei Klein [6, S. 155 ff.). Die Vorgehensweise von Gregorius soll hier nicht dargestellt werden; sie findet sich bei Volkert [10, S. 3 ff.).

Dass man die Regel $\frac{d}{dx}x^n = n\cdot x^{n-1}$ nicht zur Berechnung von $\int \frac{dx}{x}$ verwenden kann, erscheint Schülerinnen und Schülern erst einmal als unverständliche Lücke. Noch unverständlicher auf den ersten Blick wirkt dann die Tatsache, dass dies Integral etwas mit einer transzendenten Funktion zu tun hat. Selbstverständlich lässt sich dieser Zusammenhang mathematisch korrekt auch auf Schulniveau einsehen – gleichwohl verbleibt bei den Lernenden ein Gefühl der Unheimlichkeit.

Daher werden in diesem Aufsatz verschiedene Wege dargestellt, wie man den genannten Zusammenhang möglichst anschaulich einsichtig machen kann. Vom rein mathematischen Standpunkt aus sind viele der folgenden Betrachtungen überflüssig; aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler tragen sie hoffentlich zu einem breiteren Verständnis bei. Die folgenden Ausführungen sollen daher keineswegs einen Aufbau der Theorie anstreben, der so kurz wie möglich ist, sondern so anschaulich und einsichtsvoll wie möglich.

Der klassische Weg, mit der Kettenregel die Beziehung

$$e^{\ln x} = x$$

abzuleiten und so auf die Ableitung des logarithmus naturalis zu kommen, um dann damit $\int \frac{dx}{x}$ berechnen zu können, wird von Schülerinnen und Schülern häufig als “trickreich” empfunden werden. Um Alternativen darzustellen, müssen die Unterrichts-Voraussetzungen benannt werden: Kenntnis der Exponentialfunktion $\exp_b$ (mit $\exp_b(x) = b^x$) und ihrer Ableitung, insbesondere der Zahl $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sowie der Beziehung $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a = \lim_{h\to 0}\sqrt[h]{1+ha}$, ferner Kenntnis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Schon bei der Beschäftigung mit der Ableitung der Exponentialfunktion $\exp_b$ stößt man auf den Ausdruck

$$L(b) := \frac{b^h - 1}{h};$$

es ist nämlich $\exp_b'(0) = \lim_{h\to 0} L(b)$. Dabei wird man die Äquivalenz

$$\lim_{h\to 0} L(b) = 1 \iff b = e \tag{0}$$

plausibel machen; möglicherweise bleibt aber zunächst offen, was es mit dem Grenzwert von $L(b)$ für beliebige Werte von b auf sich hat. Da die Beziehung

$$\lim_{h\to 0} L(b) = \ln b \tag{1}$$

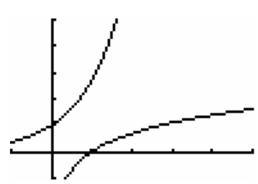
im weiteren Verlauf eine Rolle spielen wird, sollen zunächst Zugänge zu (1) erarbeitet werden. Im zweiten Teil des Aufsatzes geht es dann um die im Titel benannte Problematik.

1. Wege zu (1)

1.a Graphische Umkehrung

Im Zeitalter der graphischen Taschenrechner ist natürlich der graphische Weg naheliegend. Für kleines h definiere man $y = \frac{x^h - 1}{h}$ und besichtige den Graphen sowie den Graphen der Umkehrfunktion:

`Plot1 Plot2 Plot3`
$\backslash\, Y_1 = (X^H - 1)/H$
$\backslash\, Y_2 =$
$\backslash\, Y_3 =$
$\backslash\, Y_4 =$
$\backslash\, Y_5 =$
$\backslash\, Y_6 =$
$\backslash\, Y_7 =$



Man sieht am Graphen der Umkehrfunktion, dass der wohl vermutlich zu einer Logarithmusfunktion gehören könnte. Einsicht fördert dieser Weg allerdings nicht.

1.b Algebraische Umkehrung

Wegen

$$L(b) = c \iff c = \frac{b^h - 1}{h} \iff b = \sqrt[h]{1 + h \cdot c}$$

erkennt man: Für $h \to 0$ gilt

$$c = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} \iff b = \lim_{h \to 0} \sqrt[h]{1 + h \cdot c} = e^c \iff c = \ln b.$$

1.c. Logarithmengesetze

Manche Schülerinnen und Schüler stellen die Frage, ob man die Logarithmeneigenschaft auch direkt am Term $L(b) = \frac{b^h-1}{h}$ erkennen kann. Natürlich ist $L(1) = 0$. Wie groß $L(2)$ ist, weiß man zunächst noch nicht, aber es ist

$$L(4) = \frac{4^h - 1}{h} = \frac{(2^h + 1)(2^h - 1)}{h} = (2^h + 1)L(2) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 2L(2).$$

Allgemeiner gilt:

$$L(a \cdot b) = \frac{(a \cdot b)^h - 1}{h} = \frac{(a \cdot b)^h - a^h + a^h - 1}{h} = \frac{a^h - 1}{h} + a^h \cdot \frac{b^h - 1}{h},$$

woraus

$$\lim_{h \to 0} L(a \cdot b) = \lim_{h \to 0} L(a) + \lim_{h \to 0} L(b)$$

folgt; analog gelangt man zu den anderen Logarithmengesetzen.

Unklar bei diesem Weg bleibt nur die Logarithmen-Basis. Diese ergibt sich jedoch aus der Beziehung (0).

Nun aber zum Problem der Hyperbelquadratur!

2. Grenzübergang vom Bekannten her

Der Versuch, das in Rede stehende Integral $\int \frac{dx}{x}$ durch das gut ausrechenbare Integral

$$\int \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} + C$$

zu ersetzen und dann ε gegen 0 gehen zu lassen, scheint zunächst nicht so recht weiter zu helfen. Zur Vermeidung der (womöglich von ε abhängigen) Konstanten C empfiehlt es sich, das bestimmte Integral für $1 < b$ zu untersuchen:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \left. \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} \right|_1^b = \frac{b^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \ln b.$$

Dieser Gedankengang ist auch mathematisch interessant: Bekanntlich ist für das Bestehen der Gleichung

$$\int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

die gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolge (f_n) hinreichend; allerdings ist die (in diesem Beispiel gar nicht bestehende) gleichmäßige Konvergenz nicht notwendig; schon die (hier bestehende) monotone Konvergenz reicht hin (Heuser [2; S. 580; Satz 108.3]), falls die Integrierbarkeit der Hyperbel vorausgesetzt wird.

Hier ist ein Grundproblem des schulischen Analysis-Unterrichts angesprochen: Ob die intuitiven Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler mathematisch korrekt sind oder nicht, kann häufig nur die Lehrperson entscheiden.

3. Integration à la Fermat

Schon bei den unkritischen Potenzfunktionen ($f(x) = x^r$ mit $r \neq -1$) bietet sich bei der Integration an, nicht die übliche äquidistante Intervalleinteilung zu wählen, sondern die (wohl auf Fermat zurückgehende) geometrische Einteilung.

Die einzige Voraussetzung ist, dass das Integrationsintervall nicht die Null enthalten darf. Wir integrieren wieder von 1 bis b. Dann sei

$$[1;\, b] = [1;\, w] \cup [w;\, w^2] \cup [w^2;\, w^3] \cup \cdots \cup [w^{n-1};\, w^n];$$

es ist also $b = w^n$ bzw. $w = \sqrt[n]{b}$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} w = 1$. Dort, wo die Kurve stärker gekrümmt ist, ist auch die Intervalleinteilung feiner.

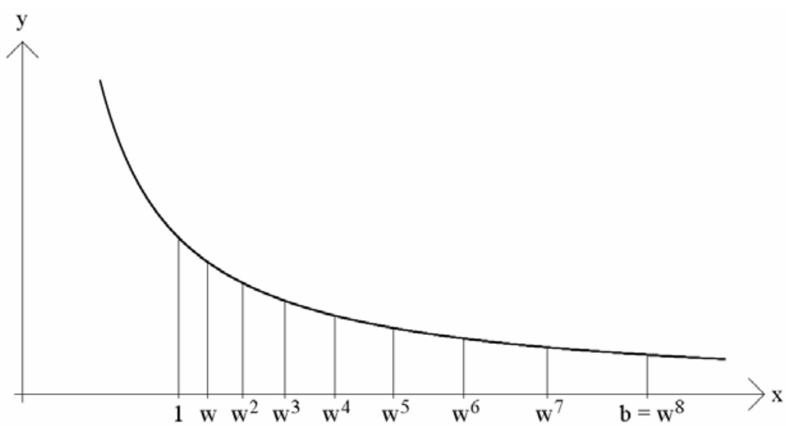


Fig. 2

Damit gestaltet sich die Integration der Hyperbel sogar als einfacher als bei den Potenzfunktionen:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{w^{i+1} - w^i}{w^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (w-1) = \lim_{n\to\infty} n(w-1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) \overset{\frac{1}{n}=h}{=} \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \ln b.$$

4. Eine unkonventionelle Benutzung von Ober- und Untersummen

Man kann das Problem der Hyperbelquadratur auch umgekehrt angehen und die Stelle ξ suchen, für die $\int_1^\xi \frac{dx}{x} = 1$ ist.

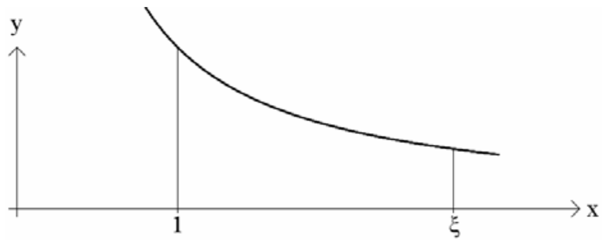


Fig. 3

Nebenher wird man hier auf anderem Weg zur Intervall-Einteilung nach Fermat (vgl. den letzten Abschnitt) geführt.

Die folgenden Ausführungen sind wiederum nicht so kurz wie möglich, sondern thematisieren ausführlich die zugehörigen Flächenabschätzungen. Dieser Abschnitt orientiert sich an Hofmann [3].

Wir nähern uns der Lösung approximativ, und zwar zunächst durch eine Rechtecks-Obersumme. Es wäre schön, wenn die Rechtecke alle gleichen Flächeninhalt hätten, bei n Rechtecken hätte dann jedes einzelne Rechteck den Flächeninhalt $\frac{1}{n}$. Dies lässt sich mit der üblichen äquidistanten Intervall-Einteilung nicht erreichen. Das am weitesten links sich befindliche Rechteck hat die Höhe 1 und muss daher die Grundseitenlänge $\frac{1}{n}$ haben.

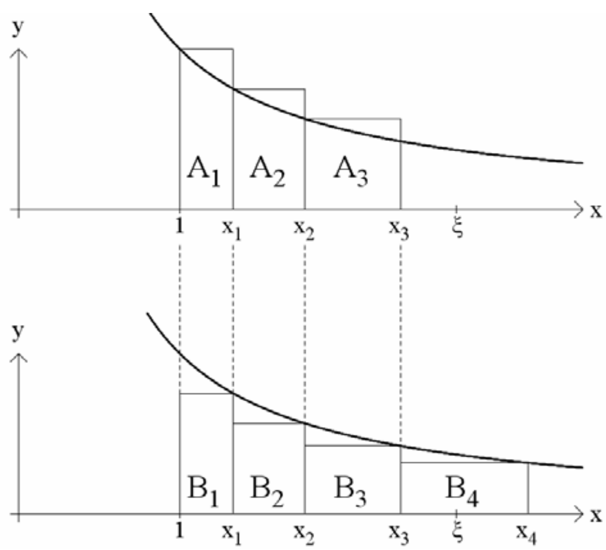


Fig. 4

Wegen $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \frac{1}{n}$ folgt nach kurzer Rechnung, dass für die zugehörigen Abszissen die Beziehung $x_i = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^i$ gelten muss. Da es sich um eine Obersumme handelt, ist

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \xi.$$

Bei den Untersummen gehen wir analog vor. Hier betrachten wir $n+1$ Rechtecke mit jeweils gleichem Flächeninhalt $B_1 = B_2 = \cdots = \frac{1}{n+1}$. Das am weitesten links sich befindliche Rechteck soll wieder die Grundseitenlänge $\frac{1}{n}$ haben. Es zeigt sich (wieder nach kurzer Rechnung), dass die zugehörigen Abszissen mit den zu den Obersummen gehörigen übereinstimmen.

Da es sich um eine Untersumme handelt, muss

$$x_n = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \xi < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = x_{n+1}$$

sein.

Die weitere Vorgehensweise ist klar: Vergrößerung von n liefert engere Schranken für ξ. Damit ist glaubhaft, dass $\xi = e$ ist. Analog kann man vorgehen, wenn man dasjenige η ermitteln will, für das $\int_1^\eta \frac{dx}{x} = r \in \mathbf{Q}$ ist (ggf. muss man n passend wählen).

5. Eine Integralinvarianz

Man kann das Problem der Hyperbelquadratur auch so angehen, dass man Beziehungen zwischen $\int_1^\xi \frac{dx}{x}$ und $\int_1^\eta \frac{dx}{x}$ sucht.

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ soll von a bis b integriert werden. Am Flächeninhalt ändert sich nichts, wenn man den Graphen erst um den Faktor k in x-Richtung (mit dem Ergebnis $y = \frac{1}{x/k}$) und anschließend um den Faktor $\frac{1}{k}$ in y-Richtung streckt (mit dem Ergebnis $y = \frac{1}{x}$); es gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ka}^{kb} \frac{dx}{x}.$$

Die folgende Graphik zeigt die Zusammenhänge.

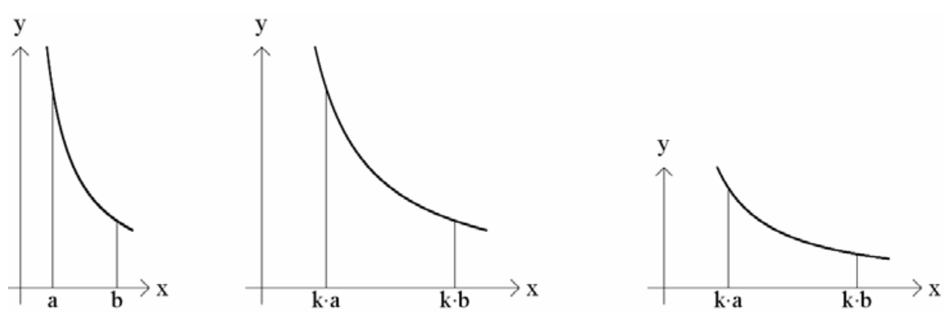


Fig. 5

(Durch Substitution $z = kx$ gelangt man auch ohne graphische Anschauung zum gleichen Resultat.) Hieraus folgt aber:

$$\int_1^u \frac{dx}{x} + \int_1^v \frac{dx}{x} = \int_1^u \frac{dx}{x} + \int_u^{uv} \frac{dx}{x} = \int_1^{uv} \frac{dx}{x}$$

bzw. mit

$$A(u) := \int_1^u \frac{dx}{x}$$

die logarithmische Beziehung

$$\boxed{A(u) + A(v) = A(uv)}.$$

Der Flächeninhalt verhält sich demnach wie ein Logarithmus (man überzeugt sich leicht davon, dass für rationale r auch $A(u^r) = r \cdot A(u)$ gilt).

Eine alternative Begründung über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist “trickreicher” und weniger anschaulich: Es ist $A'(u) = \frac{1}{u}$, aber für ein Konstante v auch $A'(vu) = \frac{1}{u}$, also gilt $A(vu) - A(u) = C$. Setzt man $u = 1$, ergibt sich $C = A(v)$. Für eine Konstante r gilt auch

$$A'(u^r) = \frac{ru^{r-1}}{u^r} = \frac{r}{u},$$

mithin ist $A(u^r) - rA(u) = C$. Setzt man $u = 1$, ergibt sich $C = 0$ und damit $A(u^r) = rA(u)$.

Eine erste Vorstufe zu der Beziehung $\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ka}^{kb} \frac{dx}{x}$ wird durch die (aufgrund der Symmetrie zur 1. Winkelhalbierenden) anschaulich klare Flächengleichheit $A = B$ geliefert,

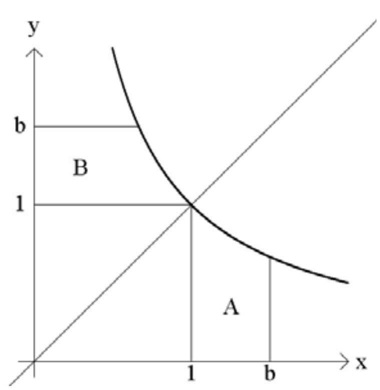


Fig. 6

woraus man schnell die Beziehung

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \int_{1/b}^1 \frac{dx}{x}$$

gewinnt.

Die Frage nach der zu logarithmischen Beziehung $A(u) + A(v) = A(uv)$ gehörigen Basis klärt sich etwa so: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist für kleine Werte von h und einen festen Wert von x

$$\frac{1}{x} \approx \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{A\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h} \overset{\varepsilon := \frac{h}{x}}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{A(1+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Für kleine Werte von ε muss mithin $\frac{A(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \approx 1$ sein. Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{n}$, so ist für große Werte von n die Beziehung

$$nA\left(1 + \frac{1}{n}\right) = A\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \approx 1$$

richtig, was Anlass zur (beweisbaren) Vermutung gibt, dass dann wohl $A(e) = 1$ sein wird und mithin der in Rede stehende Logarithmus die Basis e haben wird.

Dies war schon das Ergebnis des letzten Abschnitts.

6. Eine äquivalente Fragestellung

Will man $\int \frac{dx}{x}$ ermitteln, kann man sich auch überlegen, was man über eine mögliche Stammfunktion A weiß. Nach dem Hauptsatz muss $A'(x) = \frac{1}{x}$ sein. Da A monoton steigend ist, existiert (jedenfalls für positive Argumente) zu A eine Umkehrfunktion f. Leitet man nun die Beziehung $x = A(f(x))$ auf beiden Seiten ab, so wird man auf

$$1 = A'(f(x)f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

geführt. Die Lösung der Differentialgleichung $f' = f$ sollte aber schon bei der Ableitung der Exponentialfunktion als $\exp_e$ identifiziert worden sein, so dass $A(x) = \ln x$ folgt.

Der Gedankengang lässt sich auch umkehren: Es sei $f' = f$ und A die Umkehrfunktion zu f. Leitet man nun die Beziehung $x = f(A(x))$ ab, so gelangt man zu

$$1 = f'(A(x))A'(x) = f(A(x))A'(x) = xA'(x)$$

und damit zu $A'(x) = \frac{1}{x}$. Mithin gilt (Schornstein [8]):

Das Finden einer Stammfunktion zu $\dfrac{1}{x}$ ist äquivalent zum Finden einer Funktion mit $f' = f$.

Der Sachverhalt wird auch an Steigungsdreiecken deutlich Fig. 7.

Man betrachte den Graphen zu f an derjenigen Stelle ξ, wo $f(\xi) = a$ ist. Wenn $f' = f$ gilt, hat das im Punkt $(\xi; a)$ angebrachte Steigungsdreieck das Kathetenverhältnis $\frac{a}{1}$. Dann hat die Umkehrfunktion A zu f an der Stelle a die Steigung $\frac{1}{a}$, also ist $A'(a) = \frac{1}{a}$. Weil diese Argumentation für alle positiven Werte von a

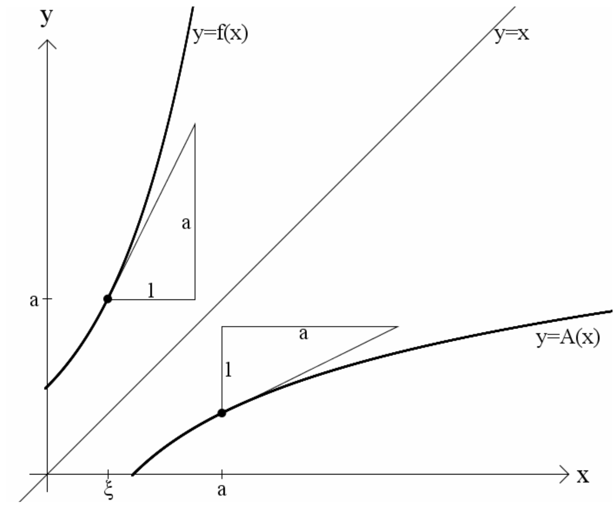


Fig. 7

durchführbar ist, ist A Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass dieser Gedankengang umkehrbar ist.

Insgesamt hat man das Resultat: Die Umkehrfunktion f der Lösung von $f' = f$ ist die Logarithmusfunktion. Sie ist mithin Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$.

7. Numerischer Zugang

Wegen der im letzten Abschnitt angesprochenen Äquivalenz sollte die Berechnung des logarithmus naturalis ähnlich verlaufen wie die Bestimmung von f aus der Differentialgleichung $f = f'$. Es sei also $A'(x) = \frac{1}{x}$ und $A(1) = 0$. Für kleine h gilt dann

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \frac{1}{x} \quad \text{und deshalb} \quad A(x+h) = A(x) + \frac{h}{x},$$

was noch nicht viel zu nützen scheint.

Für kleine h und einen festen Wert von x gilt aber ebenso

$$\frac{A(x + \boxed{x} \cdot h) - A(x)}{\boxed{x} \cdot h} \approx \frac{1}{x}$$

und deshalb $A(x(1+h)) \approx A(x) + h$. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} x = 1: &\qquad A(1+h) \approx h \\ x = 1+h: &\qquad A((1+h)^2) \approx 2h \\ (*) \qquad \text{Iteriert}: &\qquad \boxed{A((1+h)^n) \approx nh} \end{aligned}$$

Hier kann man auf (mindestens) zwei Arten die Fortsetzung gestalten:

7.a. Fortsetzung bezüglich des Arguments

Setzt man $(1+h)^n =: t$, so ist $h = t^{1/n} - 1$ und damit

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} n(t^{1/n} - 1) = \ln t.$$

7.b. Fortsetzung bezüglich des Funktionswerts

Setzt man in $(*)$ ein, so bekommt man

$$A\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right) \approx r,$$

also ist $A(e^r) = r$.

8. Digression: ln 2 als alternierende harmonische Reihe

In diesem Abschnitt wird man sehen, dass die gewohnte äquidistante Intervall-Einteilung durchaus gewinnbringend einsetzbar ist.

Die zu $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ gehörige Untersumme U_4 besteht aus vier Rechtecken, die sich weiter rechts in der Graphik mit Breite 1, aber unverändertem Flächeninhalt, wiederfinden; man sieht den Zusammenhang zu Abschnitt 5 (die Graphik wurde in y-Richtung gestreckt):

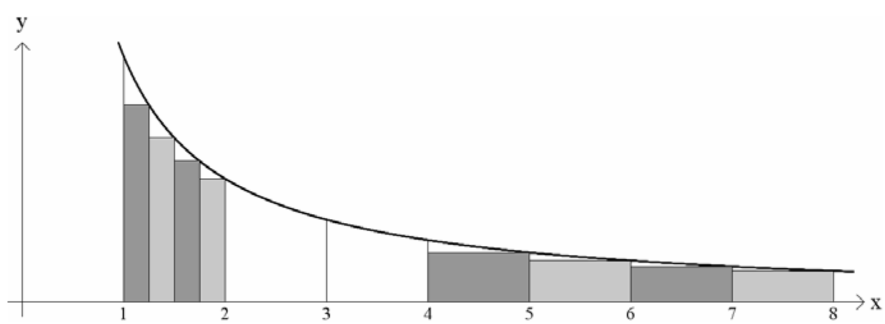


Fig. 8

Die sich rechts befindliche Untersumme zu $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ läst sich als Differenz schreiben; in den folgenden Bildern sind die zu subtrahierenden Rechtecke nach unten aufgetragen, Fig. 9.

Nun hat T_{2k} die doppelte Höhe wie R_k (für $k = 1, \ldots, 4$); man hat daher die folgende Graphik, in wiederum die zu $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ gehörige Untersumme als Differenz dargestellt ist, Fig. 10.

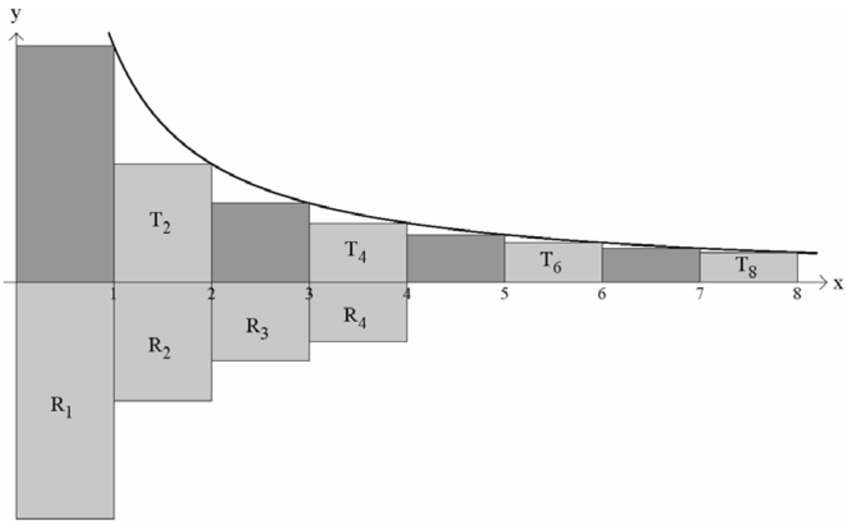


Fig. 9

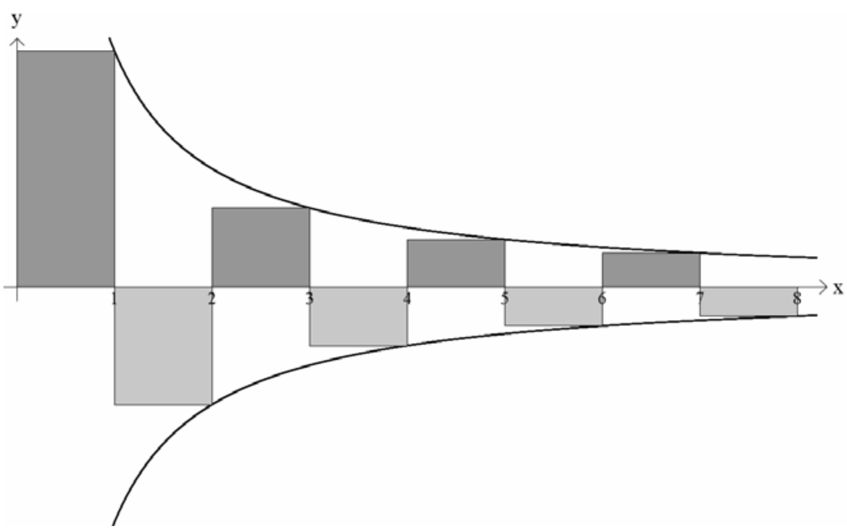


Fig. 10

Man sieht, dass man den Anfang der alternierenden harmonischen Reihe erhalten hat.

Dies lässt sich auch allgemein formulieren: Für die zu $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ gehörige

Untersumme U_n und Obersumme O_n (bei äquidistanter Intervall-Einteilung) gilt

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k},$$

$$O_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = U_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = U_n + \frac{1}{2n}.$$

Die obigen Graphiken legen nahe, die Untersumme etwas näher zu betrachten:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}; \end{aligned}$$

man hat also den Anfang der alternierenden harmonischen Reihe. Wegen

$$U_n < \ln 2 < U_n + \frac{1}{2n}$$

bzw. $0 < \ln 2 - U_n < \frac{1}{2n}$ folgt daher

$$\ln 2 = \sum_{i>0}\frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

LITERATUR

[1] Apfelbacher, K., ln 2 *auf der Oberstufe*, Praxis der Mathematik **05** (1963), 321–328.

[2] Heuser, H., *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart, 1991.

[3] Hofmann, A., *e und die natürlichen Logarithmen im Unterricht*, Mathematik und Naturwissenschaften im Unterricht, **1** (1994), 1–3.

[4] Hofmann, J., *Geschichtliches zu den natürlichen Logarithmen*, Praxis der Mathematik **05** (1963), 225–232.

[5] Hui, E, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, Praxis der Mathematik **04** (1962), 261.

[6] Klein, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Band 1*, Berlin usw., Springer, 1968; Nachdruck von 1933.

[7] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Volume 1*, New York usw., Oxford University Press, 1990; Nachdruck von 1972.

[8] Schornstein, J., *Vorschlag zur Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktion in Grund- und Leistungskursen*, Mathematik in der Schule **31** (1993), 277–285; 290–291.

[9] Toeplitz, O. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972; Nachdruck von 1949.

[10] Volkert, K., *Die Quadratur der Hyperbel des Gregorius a San Vincento*, Journal für Mathematik-Didaktik **17**, 3–20.

Dr. Jörg Meyer, Schäfertrift 16, D-31789 Hameln, Deutschland

E-mail: J.M.Meyer@t-online.de