THE TEACHING OF MATHEMATICS
2015, Vol. XVIII, 1, pp. 1–15

VON DER KLASSIFIKATION DER VIERECKE ZUM SYSTEM DER VIERECKE

Joachim T. Haug and Carolin Haug

Abstract. The currently available classification schemes of quadrilaterals do not include all possible types of quadrilaterals, but only an arbitrary subset. Additionally, students often have problems to understand these classifications. Therefore, this study aims at constructing a comprehensive and logically structured systematics of quadrilaterals. Herein the characteristics of its elements should determine its elements. The basis here are six quadrilaterals of first order, which are characterized by either two same angles, two sides of the same length (both either adjacent or opposed to each other), two parallel or orthogonal sides. Combination of these quadrilaterals with one of the other characters results in quadrilaterals of second order; further character combinations lead to quadrilaterals of third or fourth order, the latter including the square. This approach reveals that several, even highly ordered quadrilaterals, are yet unnamed. In addition to the square there is another quadrilateral of fourth order, the complex double-orthogonal three-sides-equal quadrilateral. The applicability of the newly found quadrilaterals still needs to be studied. The here presented systematics of quadrilaterals with its logical basis should probably be easier to teach than the classifications available to date.

MathEduc Subject Classification: G44

MSC Subject Classification: 97G40

Key words and phrases: Classification of quadrilaterals.

1. Hintergrund

1.1. Die Klassifikation der Vierecke

Die sogenannte 'hierarchische Klassifikation der Vierecke' mag vom mathematikwissenschaftlichen Standpunkt her als eher trivial und bereits erschöpfend behandeltes Thema erscheinen. Betrachtet man jedoch die Schwierigkeiten, die Schüler beim Erlernen dieser Klassifikation zu haben scheinen (z.B. Fujita [6], Heinze [8]), wird klar, dass dieses Thema in keinster Weise trivial ist.

Im deutschsprachigen Raum wird die Klassifikation der Vierecke oft im 'Haus der Vierecke' dargestellt. Vogelsberger [11] weist jedoch darauf hin, dass es nicht nur ein solches Haus der Vierecke gibt, sondern dass hiervon mehrere Versionen existieren, die sich in signifikanten Details voneinander unterscheiden.

Aus der Tatsache, dass mehrere verschiedene Klassifikationen der Vierecke existieren, lässt sich ableiten, dass (zumindest einigen von) diesen Klassifikationen eine gewisse Willkür zu Grunde liegt (siehe auch Vogelsberger [11]). Hierin liegt sicher auch einer der Gründe, warum Schüler Probleme beim Erlernen dieser Klassifikation(en) haben: Willkürliche Klassifikationen sind weder intuitiv noch logisch zu erfassen (z.B. Fujita [6]) und stoßen somit nicht nur auf Unverständnis, sondern sogar auf Widerstand (De Villiers [3]).

Damit lässt sich auch die Feststellung erklären, dass die Fähigkeit von Schülern aber auch angehenden Lehrern hierarchisch mit Vierecken umzugehen zumeist schlecht entwickelt ist (z.B. De Villiers [4], Fujita [6], Zilkova [14]).

Betrachten wir bestehende Klassifikationen im Detail, so finden sich Unterschiede sowohl in den enthaltenen Elementen, als auch in den genauen Beziehungen zwischen diesen (Beispiele in Zilkova [14]). Die häufigsten Elemente in einer Klassifikation der Vierecke sind das Quadrat, das Rechteck, die Raute, das Parallelogramm und fast immer das Trapez. Weitere häufige Elemente sind das Drachenviereck (Deltoid) und das achsensymmetrische Trapez (gleichschenkliges Trapez). Seltene Elemente sind (unter anderem) Vierecke mit Innenkreisen und Außenkreisen oder schiefe Drachenvierecke. Eine der umfangreichsten Klassifikationen ist wohl die von De Villiers [4], doch auch andere Autoren bemerken, dass bei den üblichen Formen des Hauses der Vierecke viele Formen "vergessen" wurden (z.B. Walser [13]). Viele Häuser wirken außerdem asymmetrisch (z. B. Roth [10], seine Abb. 36; Kimeswenger [9]. ihre Abb. 50). Einige Autoren versuchen diese Asymmetrie auszugleichen, doch scheinen sie nicht immer die notwendigen Elemente zum Ausgleichen zu finden (z.B. Fritsch [5], seine Abb. 5).

1.2. Klassifikation versus System

Wie bereits gesagt gibt es somit kein einheitliches Schema um Vierecke zu klassifizieren. Noch viel weniger gibt es somit ein echtes System im strikten Sinne. In anderen Bereichen der Wissenschaft, etwa der Biologie, ist der grundlegende Unterschied zwischen einer (willkürlichen) Klassifikation und einem natürlichen System ausführlich erörtert worden (z.B. Ax [2]). In der Biologie stellt die gemeinsame Abstammung den entscheidenden Faktor der Systematisierung dar (Hennig [7]). Dieses Kriterium lässt sich jedoch nicht auf die hier erörterte Problematik, die Klassifikation der Vierecke, anwenden.

Dennoch scheint die biologische Systematik auch gern mit der mathematischen Klassifikation verglichen zu werden (z.B. Walser [13]). Die Diskussion um die biologische Systematik liefert bei genauem Vergleich ein wertvolles Kriterium, welches sich auch auf die Klassifikation der Vierecke anwenden lässt. Das wichtigste Kriterium in der biologischen Systematik, die Abstammung von gemeinsamen Vorfahren, kann nicht ohne weiteres erkannt, sondern muss rekonstruiert werden. Um zu beurteilen welche von mehreren Rekonstruktionen wahrscheinlich ist, gibt es mittlerweile verschiedene Ansätze, von denen jedoch viele hart umstritten sind (z.B. Ax [2], Wägele [12], Assis [1]). Als eine plausible Rekonstruktion kann jedoch aus formal logischen Gründen eine solche angesehen werden, die in sich selbst schlüssig ist (Assis [1]). Eine solches System weist somit eine Konsistenz mit ihren eigenen Bedingungen auf und damit eine innere Kohärenz, eine innere Ordnung. Dieses Prinzip lässt sich sehr wohl auf die Klassifikation der Vierecke übertragen.

Als kohärent kann dabei ein System angesehen werden, in dem Elemente und ihre Eigenschaften sich gegenseitig bedingen. Um ein solches System zu rekonstruieren sollten also die Eigenschaften der Elemente im Mittelpunkt stehen.

1.3. Eigenschaften von Vierecken

Die meisten bestehenden Klassifikationen der Vierecke verwenden verschiedene Eigenschaften auf verschiedenen Ebenen. Damit zeigt sich, dass sich die Willkür der Elemente in den Klassifikationen der Vierecke auch in den angewandten Eigenschaften widerspiegelt. Eine interessante Ausnahme bildet die Klassifikation von Vogelsberger [11]. Diese Klassifikation richtet sich strikt nach den Symmetrieeigenschaften der Elemente, umfasst jedoch verglichen mit dem Ansatz von De Villiers [4] vergleichsweise wenige Elemente. Der Ansatz von speziellen Eigenschaften auf die Elemente und deren Beziehungen zueinander zu schließen ist jedoch vielversprechend und soll im Folgenden konsequent angewendet werden. Dafür müssen wir zunächst die Eigenschaften der "klassischen" Vierecke betrachten. Dabei sollen hier auch zunächst "klassische" Eigenschaften diskutiert werden.

Betrachten wir etwa ein Drachenviereck, so ist eine der augenfälligen Eigenschaften, dass je zwei benachbarte Seiten die gleiche Länge aufweisen. Beim Parallelogramm hingegen sind jeweils die zwei gegenüberliegenden Seiten gleich lang. Wir nehmen diese beiden Fälle als ein Eigenschaftspaar wahr: 'Gegenüberliegende Seiten gleich lang' oder 'benachbarte Seiten gleich lang'. Ein ähnliches Eigenschaftspaar finden wir, wenn wir die Winkel betrachten. Nehmen wir erneut das Parallelogramm; hier sind zwei jeweils gegenüberliegende Winkel gleich groß. Beim gleichschenkligen Trapez sind jeweils die zwei nebeneinander liegenden Winkel gleich. Als weitere häufig verwendete Eigenschaften sollen hier der rechte Winkel sowie parallele Seiten herangezogen werden. Genauer betrachtet handelt es sich bei diesen Eigenschaften nämlich auch um ein Eigenschaftspaar welches die spezifische Lagebeziehung nebeneinander liegender Seiten (rechter Winkel), beziehungsweise gegenüberliegender Seiten (parallel) beschreibt.

Wie im Folgenden dargestellt, können mit diesen drei Eigenschaftspaaren (gleiche Länge, gleicher Winkel, Lagebeziehung) die meisten gängigen Vierecke beschrieben und hergeleitet werden. Darüber hinaus ergeben sich jedoch eine ganze Reihe weiterer spezieller Vierecke, die nicht zum klassischen Kanon gehören. Der hier vorgestellte Ansatz soll sich auch lediglich auf die drei genannten Eigenschaftspaare beschränken, um zu vermeiden, dass die Anzahl der zu diskutierenden "nicht-kanonischen" Vierecke zu groß wird. Weitere Eigenschaften hinzuzunehmen würde den Rahmen dieser Arbeit deutlich sprengen. Der im Folgenden dargestellte Ansatz hat jedoch das Potential um beliebige weitere Eigenschaften, etwa Lage oder Längenbeziehungen der Diagonalen oder Außen- und Innenkreise, ergänzt zu werden.

2. Vorgehensweise

Da nun dargelegt ist, welche Eigenschaften im Folgenden herangezogen werden sollen, muss noch erläutert werden, wie man mit diesen Eigenschaften eine Klassifikation erzeugen soll. Der Gedanke ist, ähnlich wie bei etwa bei Vogelsberger [11], dass es Vierecke gibt, die geordneter sind als andere. Dabei ist das Quadrat das Viereck mit der höchsten Ordnung, was sich auch in allen bisher vorgeschlagenen Klassifikationen so findet. Steigende Ordnung kann nun dadurch erzeugt werden, dass Vierecke erster Ordnung lediglich eine Eigenschaft erfüllen, diejenigen zweiter Ordnung zwei Eigenschaften usw.

Um so ein kohärentes System zu erzeugen ist es wichtig, dass alle Elemente, die sich konsequent aus diesem Ansatz ergeben, berücksichtigt werden. Dies wird am einfachsten durch eine Eigenschaftsmatrix erreicht. Zunächst kann mit einer zweidimensionalen Matrix begonnen werden. Diese kann dann sukzessive um weitere Dimensionen erweitert werden. Diese multidimensionale Matrix wird hier als aufeinander aufbauende zweidimensionale Matrizen dargestellt, da dies im herkömmlichen narrativen Ablauf einer Publikation leichter nachzuvollziehen sein dürfte. Durch diese Weise der Darstellung verringert man auch die Anzahl der Doppeldarstellungen. Die Darstellung ist in ihrem Ergebnis nun nicht die am einfachsten zu erfassende und damit nicht die intuitiv sinnvollste. Sie vermittelt jedoch am besten den Prozess der Herleitung der verschiedenen Vierecksformen. Eine Herleitung einer intuitiv erfassbaren grafischen Darstellung sehen wir als ein zukünftiges Projekt an, welches an dieser Stelle jedoch zu weit führen würde.

Als kurze Anmerkung sei erwähnt, dass aus der folgenden Diskussion entartete Vierecke weitestgehend ausgeschlossen sind. Somit tauchen keine Vierecke auf, die Winkel von 0°, 180° oder 360° beinhalten.

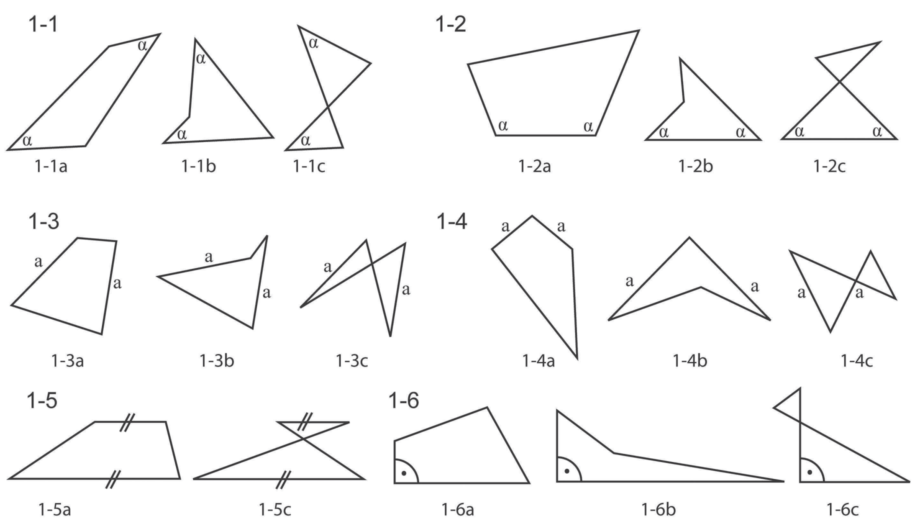

Abb. 1. Die sechs Vierecke erster Ordnung. Diese zeichnen sich alle durch eine einzelne Eigenschaft aus: gleiche Winkel, gegenüber 1-1, benachbart 1-2; gleiche Länge, gegenüber 1-3, benachbart 1-4; Lagebeziehung, gegenüber (parallel) 1-5, benachbart (rechter Winkel) 1-6. Nur eines dieser Vierecke trägt eine speziellen Namen, das Trapez (1-5)

	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
1-1	2A	2B	2D	2G	2K	2P
1-2	2B	2C	2E	2H	2L	2Q
1-3	2D	2E	2F	2I	2M	2R
1-4	2G	2H	2I	2J	2N	2S
1-5	2K	2L	2M	2N	2O	2T
1-6	2P	2Q	2R	2S	2T	2U

Abb. 2. Erste Eigenschaftsmatrix. Ausgegraute Felder sind Doppelbelegungen

Als Ausgangspunkt dienen die sechs Vierecke, die sich aus den sechs Eigenschaften ergeben (Abb. 1). Diese sind dann Vierecke erster Ordnung. Jene Vierecke, die aus der ersten Matrix (Abb. 2) resultieren, erfüllen je zwei Eigenschaften, sind somit Vierecke zweiter Ordnung (Abb. 3, 4). Basierend auf diesen wird eine weitere Matrix aufgestellt (Abb. 5), aus der die Vierecke dritter Ordnung (Abb. 6–8) hervorgehen. Aus diesen wird wiederum eine Matrix aufgestellt (Abb. 9). Bei dieser erzeugt man das Viereck höchster Ordnung, das Quadrat (Abb. 10).

Um die verschiedenen Vierecke erster und höherer Ordnung besser ansprechen zu können, werden im Folgenden (und hoffentlich in sich hierauf beziehenden Arbeiten) alle Vierecke mit Nummern versehen. Diese ist zweiteilig; die erste Zahl gibt die Ordnung an, die zweite (von der ersten durch einen Strich getrennt) ist eine konsekutive Nummerierung in Reihenfolge des Auftauchens in der Merkmalsmatrix. Zusätzlich wird im Falle einer konvexen Variante ein kleines 'a' angehängt. Eventuell vorhandene konkave Varianten haben dann ein kleines 'b', überschlagene Vierecke ein kleines 'c'. In einigen Fällen resultieren mehrere mögliche Vierecke aus einer Merkmalskombination, die sich z.B. in der relativen Lage der festgelegten Winkel oder Seiten unterscheiden. Diese werden wiederum durch eine Zahl ergänzt und konsekutiv durchnummeriert.

3. Ergebnisse

Bei konsequenter Anwendung ergeben sich 6 Vierecke erster Ordnung (Abb. 1), 15 Vierecke zweiter Ordnung (Abb. 3,4), 13 Vierecke dritter Ordnung (Abb. 6-8) und 2 Vierecke vierter Ordnung (Abb. 10). Diese Zahlen kommen dadurch zustande, dass mehrfach entstandene Vierecksformen jeweils nur einmal gezählt werden. Außerdem werden auch Vierecksformen nur einfach gezählt, bei denen sich durch Anwendung einer weiteren Eigenschaft die Form nicht weiter verändert.

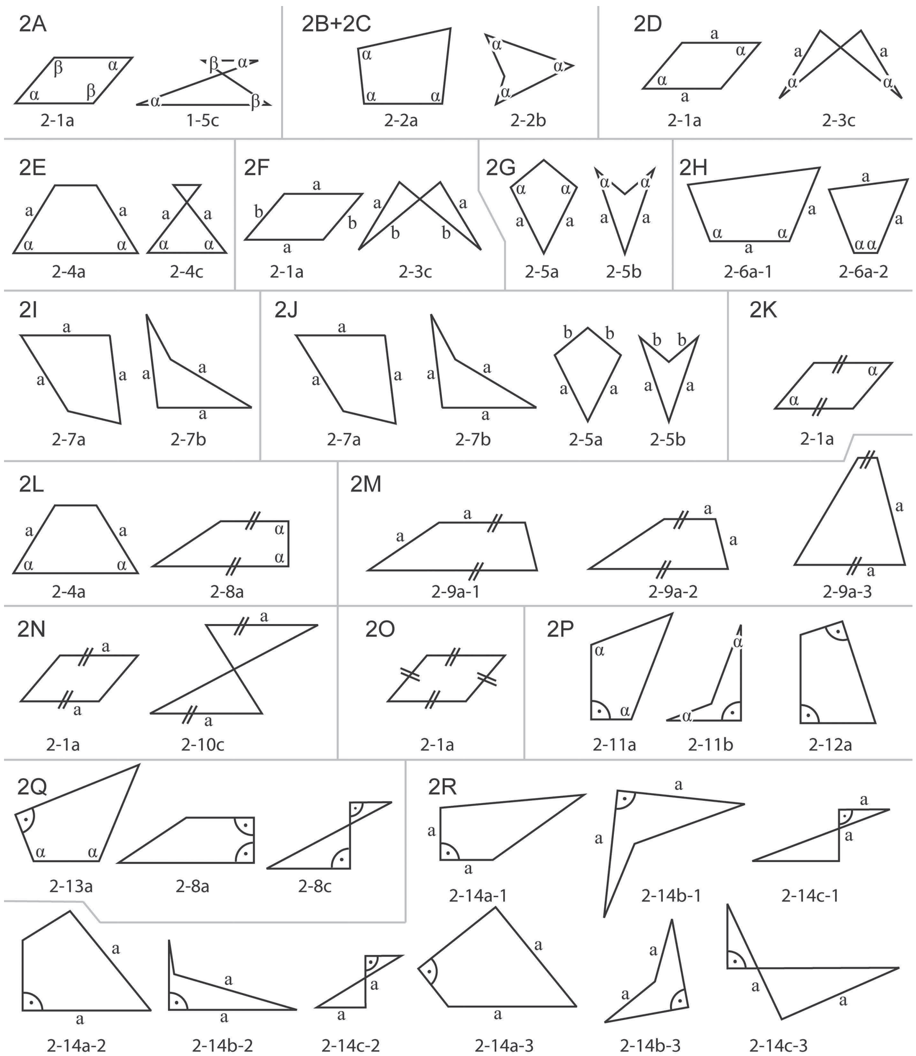

Abb. 3. Vierecke zweiter Ordnung, erster Teil

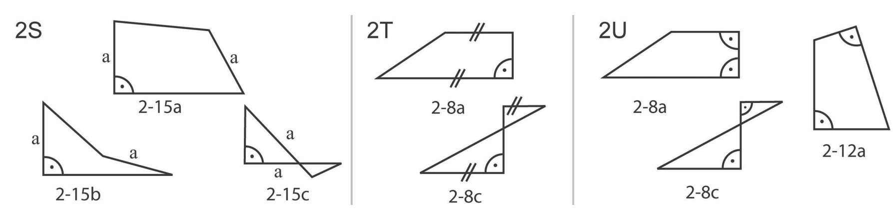

Abb. 4. Vierecke zweiter Ordnung, zweiter Teil

	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	3AA	3AB	3AC	3AD	3AE	3AF
2-2	3BA	3BB	3BC	3BD	3BE	3BF
2-3	3CA	3CB	~~3CC~~	~~3CD~~	3CE	~~3CF~~
2-4	3DA	3DB	3DC	3DD	3DE	3DF
2-5	3EA	3EB	3EC	3ED	3EE	3EF
2-6	3FA	3FB	3FC	3FD	3FE	3FF
2-7	3GA	3GB	3GC	3GD	3GE	3GF
2-8	3HA	3HB	3HC	3HD	3HE	3HF
2-9	3IA	3IB	3IC	3ID	3IE	3IF
2-10	3JA	3JB	3JC	~~3JD~~	~~3JE~~	3JF
2-11	3KA	3KB	3KC	3KD	3KE	3KF
2-12	3LA	3LB	3LC	3LD	3LE	3LF
2-13	3MA	3MB	3MC	3MD	3ME	3MF
2-14	3NA	3NB	3NC	3ND	3NE	3NF
2-15	3OA	3OB	3OC	3OD	3OE	3OF

Abb. 5. Zweite Eigenschaftsmatrix. Durchgestrichene Felder sind logisch nicht mögliche Kombinationen

Bei der Betrachtung der Vierecke erster Ordnung fällt sofort auf, dass lediglich eines, das mit parallelen (gegenüber liegenden) Seiten, einen gesonderten Namen trägt, das Trapez. Auch bei vielen Vertretern höherer Ordnungen finden wir keinen speziellen Namen für diese.

Insbesondere fällt auf, dass es ganze "Populationen" von Drachenvierecken und Trapezen gibt, die hoch geordnete Vierecke darstellen aber keine eigenen Namen tragen. Beim Drachenviereck haben wir neben dem normalen Drachenviereck (2-5) das rechtwinklige (3-7), das doppelt rechtwinklige (3-8) und das dreiwinklige Drachenviereck (3-4), die bisher keinen richtigen Namen hatten (anders etwa die Drachenvierecksonderform Raute und ihre Sonderform, das Quadrat) und somit nicht als spezielle Vierecksformen wahrgenommen wurden. Dabei wird sofort klar, dass es sich in der Tat um höher geordnete Vierecke handelt. Beim Trapez haben wir neben dem normalen Trapez (1-5) das rechtwinklige (eigentlich doppelt rechtwinklig; 2-8), das zweiseitige (2-9), das gleichschenklige (2-4), und das dreiseitige Trapez (3-6), die auch keinen separaten Namen hatten. Bei diesen Formen des Trapezes fällt sogar auf, dass sie drei verschiedene Ordnungsebenen darstellen.

Nur das Parallelogramm (2-1; auch ein Trapez) und seine Spezialform Rechteck (3-1; und wiederum das Quadrat, 4-1) erhielten einen eigenen Namen.

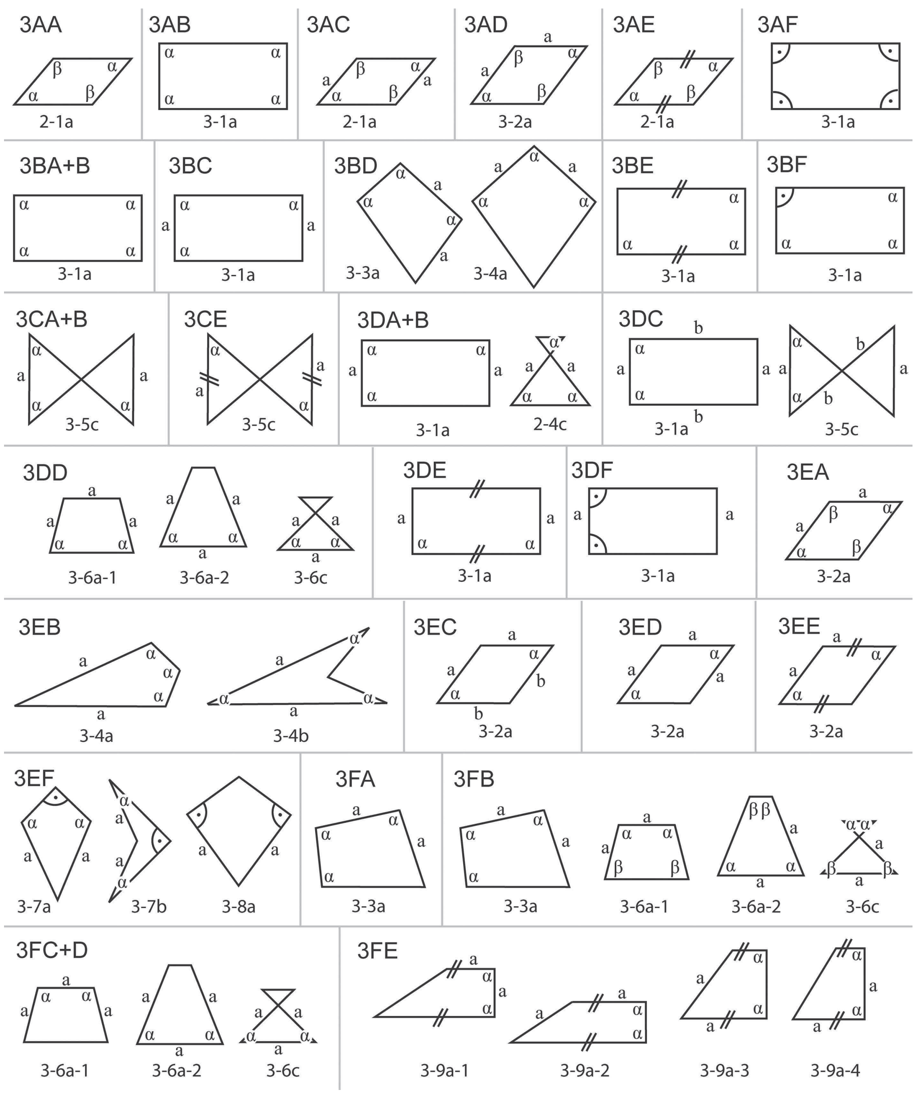

Abb. 6. Vierecke dritter Ordnung, erster Teil

Das gleichschenklige Trapez taucht in einigen bestehenden Klassifikationen auf (etwa bei Vogelsberger [11]). Es ist jedoch nicht direkt einsichtig, warum ausgerechnet diese Spezialisierung bercksichtigt werden sollte, wohingegen andere nicht als spezielle Formen wahrgenommen werden sollten.

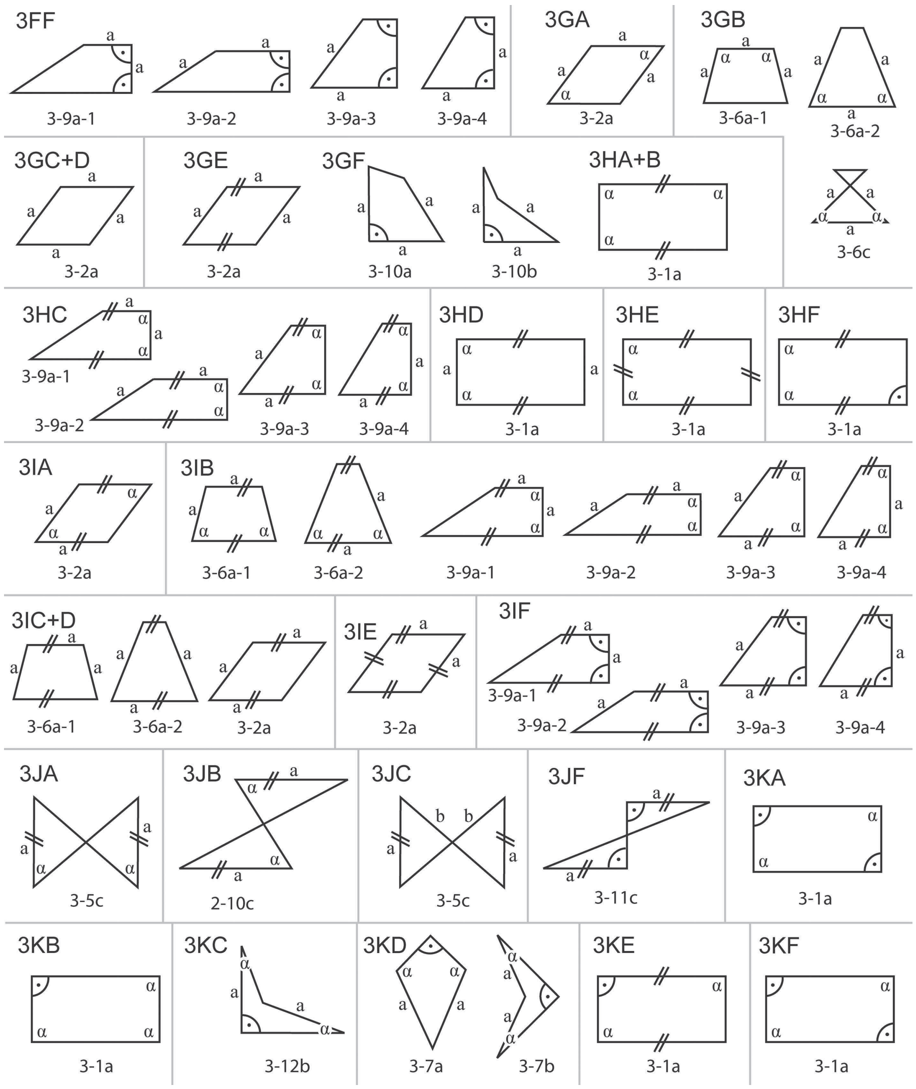

Abb. 7. Vierecke dritter Ordnung, zweiter Teil

Ein überraschender Befund ist, dass es neben dem Quadrat ein weiteres Viereck vierter Ordnung gibt. Es entstehen in der dritten Matrix neben dem Quadrat verschiedene andere Vierecke; diese sind jedoch Formen, die durch die vierte Zusatzbedingung nicht weiter eingeschränkt werden. So etwa das Rechteck, welches nicht durch zusätzliche Einschränkung der Eigenschaften 'Winkel' zum Quadrat werden kann, weil beim Rechteck bereits alle Winkel festgelegt sind. Anders beim überschlagenen doppelt rechtwinkelig-dreiseitigen Viereck (4-2). Dieses scheint ein echtes Viereck vierter Ordnung zu sein (siehe weiter unten).

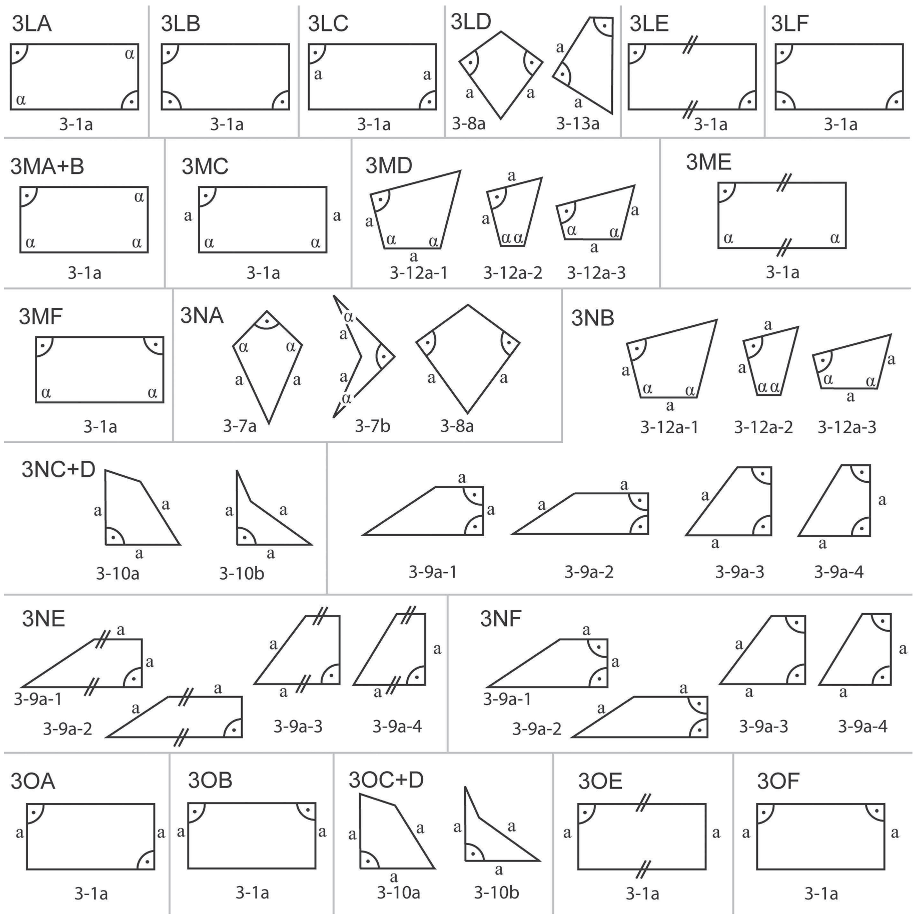

Abb. 8. Vierecke dritter Ordnung, dritter Teil

4. Diskussion

4.1. Allgemeine Diskussion

Man mag sich nun fragen, wofür man diese "zusätzlichen" Vierecke erster und höherer Ordnung "braucht". Zunächst bleibt die Feststellung, dass nur durch Einbezug dieser eine kohärente Systematisierung der Vierecke möglich ist. Des Weiteren muss man prüfen, ob diese Formen nicht an anderer Stelle auftauchen.

Nehmen wir zum Beispiel eine Pyramide über quadratischer Grundfläche und der Spitze senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt, also eine "normale" Pyramide. Schneidet man diese Pyramide parallel zur Grundfläche, erhält man einen (geraden) Pyramidenstumpf. Die Seitenflächen sind dann gleichschenklige Trapeze. Schneidet man die Pyramide jedoch nicht parallel zur Grundfläche, erhält man einen schiefen Pyramidenstumpf. Dessen Seitenflächen sind Vierecke mit zwei benachbarten gleichgroßen Winkeln, also eines der "neuen" Vierecke erster Ordnung

	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
3-1	4AA	4AB	4AC	4AD	4AE	4AF
3-2	4BA	4BB	4BC	4BD	4BE	4BF
3-3	4CA	4CB	4CC	4CD	4CE	4CF
3-4	4DA	4DB	4DC	4DD	4DE	4DF
3-5	4EA	4EB	~~4EC~~	~~4ED~~	~~4EE~~	~~4EF~~
3-6	4FA	4FB	4FC	4FD	4FE	4FF
3-7	4GA	4GB	4GC	4GD	4GE	4GF
3-8	4HA	4HB	4HC	4HD	4HE	4HF
3-9	4IA	4IB	4IC	4ID	4IE	4IF
3-10	4JA	4JB	4JC	4JD	4JE	4JF
3-11	4KA	~~4KB~~	~~4KC~~	4KD	~~4KE~~	~~4KF~~
3-12	4LA	4LB	4LC	4LD	4LE	4LF
3-13	4MA	4MB	4MC	4MD	4ME	4MF

Abb. 9. Dritte Eigenschaftsmatrix. Durchgestrichene Felder sind logisch nicht mögliche Kombinationen.

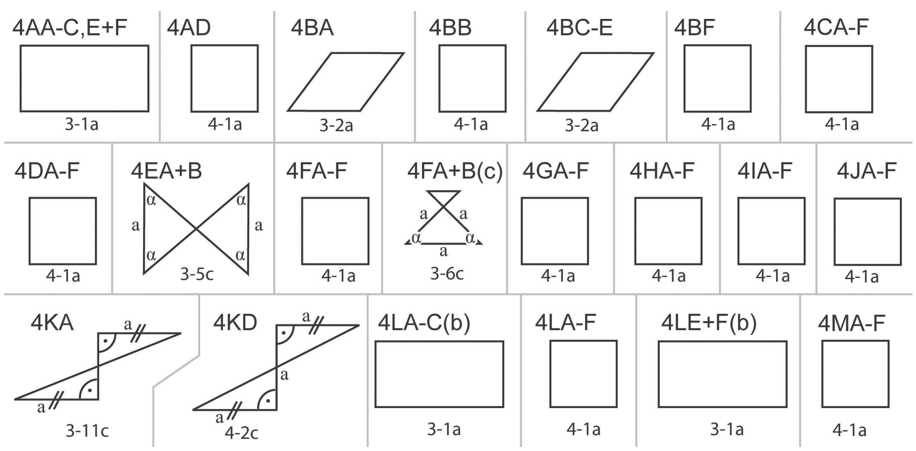

Abb. 10. Vierecke vierter Ordnung

(1-2a). Damit spielt zumindest eines der neuen Vierecke bereits eine Rolle bei der Beschreibung von Körpern.

Nummer	Typ	Gruppe	Name	Zusatz
1-1	a	konvexes	zweiwinkeliges Viereck	gegenüber
	b	konkaves	zweiwinkeliges Viereck	gegenüber
	c	überschlagenes	zweiwinkeliges Viereck	gegenüber
1-2	a	konvexes	zweiwinkeliges Viereck	benachbart
	b	konkaves	zweiwinkeliges Viereck	benachbart
	c	überschlagenes	zweiwinkeliges Viereck	benachbart
1-3	a	konvexes	zweiseitiges Viereck	gegenüber
	b	konkaves	zweiseitiges Viereck	gegenüber
	c	überschlagenes	zweiseitiges Viereck	gegenüber
1-4	a	konvexes	zweiseitiges Viereck	benachbart
	b	konkaves	zweiseitiges Viereck	benachbart
	c	überschlagenes	zweiseitiges Viereck	benachbart
1-5	a	konvexes	Trapez	
	c	überschlagenes	Trapez	
1-6	a	konvexes	rechtwinkeliges Viereck	
	b	konkaves	rechtwinkeliges Viereck	
	c	überschlagenes	rechtwinkeliges Viereck	
2-1	a	konvexes	Parallelogram	
2-2	a	konvexes	dreiwinkeliges Viereck	
	b	konkaves	dreiwinkeliges Viereck	
2-3	c	überschlagenes	zweiwinkelig-zweiseitiges Viereck (”Schmetterlingsviereck”)	
2-4	a	konvexes	gleichschenkeliges Trapez	
	c	überschlagenes	gleichschenkeliges Trapez	
2-5	a	konvexes	Drachenviereck	
	b	konkaves	Drachenviereck	
2-6	a	konvexes	zweiwinkelig-zweiseitiges Viereck	
2-7	a	konvexes	dreiseitiges Viereck	
	b	konkaves	dreiseitiges Viereck	
2-8	a	(konvexes)	doppelt rechtwinkeliges Trapez	
2-9	a	(konvexes)	zweiseitiges Trapez	
2-10	c	überschlagenes	zweiwinkelig-zweiseitiges Trapez	
2-11	a	konvexes	rechtwinkelig-zweiwinkeliges Viereck	gegenüber
	b	konkaves	rechtwinkelig-zweiwinkeliges Viereck	gegenüber
2-12	a	konvexes	doppelt rechtwinkeliges Viereck	
2-13	a	konvexes	rechtwinkelig-zweiwinkeliges Viereck	benachbart
2-14	a	konvexes	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	benachbart
	b	konkaves	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	benachbart
	c	überschlagenes	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	benachbart
2-15	a	konvexes	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	gegenüber
	b	konkaves	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	gegenüber
	c	überschlagenes	rechtwinkelig zweiseitiges Viereck	gegenüber
3-1	a	(konvexes)	Rechteck	
3-2	a	(konvexe)	Raute	
3-3	a	(konvexes)	dreiwinkelig-zweiseitiges Viereck	
3-4	a	(konvexes)	dreiwinkeliges Drachenviereck	
3-5	c	überschlagenes	“Sanduhrviereck”	
3-6	a	konkaves	dreiseitig-gleichschenkeliges Trapez	
	c	überschlagenes	dreiseitig-gleichschenkeliges Trapez	
3-7	a	(konvexes)	rechtwinkeliges Drachenviereck	
3-8	a	(konvexes)	doppelt rechtwinkeliges Drachenviereck	
3-9	a	(konvexes)	doppelt rechtwinkelig-zweiseitiges Trapez	
3-10	a	konvexes	rechtwinkelig-dreiseitiges Viereck	
	b	konkaves	rechtwinkelig-dreiseitiges Viereck	
3-11	c	überschlagenes	doppelt rechtwinkeliges Viereck	
3-12	a	konvexes	rechtwinkelig-zweiwinkelig-zweiseitiges Viereck	
	b	konkaves	rechtwinkelig-zweiwinkelig-zweiseitiges Viereck	
3-13	a	(konvexes)	doppelt rechtwinkelig-zweiseitiges Viereck	
4-1	a	(konvexes)	Quadrat	
4-2	c	überschlagenes	doppelt rechtwinkelig-dreiseitiges Viereck	

Des Weiteren sind diese “neuen” Typen von Vierecken erster bis vierter Ordnung von nicht zu unterschätzendem Wert für die Didaktik. Das hier vorgestellte System ist nicht nur in sich kohärent, sondern vermittelt eindrucksvoll das Konzept von notwendiger und hinreichender Bedingung. Wenn man die Vierecksformen, so wie hier geschehen, über die Merkmalsmatrizen herleitet, baut sich ein Verständnis dafür auf, welches Viereck welche Eigenschaften aufweist und welche Eigenschaften kombiniert werden müssen um spezielle Vierecke zu erhalten.

Besonders die hierarchische Struktur wird hierdurch leicht ersichtlich. Durch das sukzessive Anwenden von Merkmalsmatrizen wird sehr anschaulich vermittelt, wie durch zusätzliche Einschränkungen etwa aus einem Trapez ein Parallelogramm abgeleitet werden kann.

Genau dadurch fällt auch eine gewisse Sonderstellung zweier Vierecke dritter Ordnung auf, Raute und Rechteck. Aus ihnen entsteht im letzten Schritt in vielen Fällen nicht das Quadrat. Ähnliches gibt es auch auf den unteren Ebenen, z.B. überschlagenes Trapez, Matrix 2A, 1-5c (Abb. 3), Parallelogramm, Matrix 3AA und 3AC, 2-1a (Abb. 6), überschlagenes zweiwinkelig-zweiseitiges Viereck Matrix 3JB, 2-10c (Abb. 7), sowie weitere Fälle bei der letzten Matrix, 4EA+B, 3-5c, 4FA-B, 3-6c und 4KA, 3-11c (Abb. 10). Diese sind jedoch seltener als bei der Raute und deutlich seltener als beim Rechteck. Dieses Phänomen könnte man dahingehend interpretieren, dass die besondere Beachtung, die die Raute und vor allem das Rechteck (aber auch das Parallelogramm) erhalten, zumindest teilweise gerechtfertigt scheint. Ein weiterer Punkt, der hierfür spricht, ist sicherlich die schiere Anzahl der Felder, bei der die Raute und, noch zahlreicher, das Rechteck entstehen.

4.2. Ein System, besser Teilsystem, der Vierecke

Das nun hier vorgestellte Konzept erzeugt ein System, genauer Teilsystem der Vierecke. Dieses ist hierarchisch in vier Ebenen gegliedert und hat 36 Elemente. Das vorgestellte System unterscheidet sich von bisherigen Klassifikationen dadurch, dass es sich aus wenigen Eigenschaften herleiten lässt. Ein erweitertes System kann erzeugt werden, indem zusätzliche Eigenschaften hinzugenommen werden. Weiterhin unterscheidet sich das System von den meisten Klassifikationen, da bei diesen überschlagene Vierecke und konkave Vierecke häufig basal aussortiert werde. Dieses Vorgehen erscheint aufgrund des vorliegenden Konzeptes als unnötig.

Schaut man sich genau an, welche Vierecke denn zumeist in Klassifikationen auftauchen, so scheinen dies solche zu sein, von denen man mit handlichen Formeln Flächeninhalte berechnen kann.

Bei Dreiecken scheinen andere Kriterien wichtig zu sein. Einen zentralen Aspekt bilden hier Eigenschaften der Dreiecke, die mit möglichst wenig Informationen ein spezifisches Dreieck zu konstruieren ermöglichen.

In diesem Bezug ist die Betrachtung vieler der hier “neu” vorgestellten Vierecke interessant. Für ein spezifisches Quadrat benötigt man lediglich eine Information, die Länge einer Kante. Für Rechteck und Raute braucht man bereits zwei Informationen, einmal zwei Längen, im anderen Fall eine Länge und einen Winkel.

Dies gilt auch für andere Vierecke dritter Ordnung. So benötigt man für die Konstruktion eines spezifischen dreiwinkligen Drachenvierecks nur zwei Informationen. Ob die Anzahl der Informationen, die notwendig sind um ein spezifisches Viereck zu konstruieren exakt mit dem Ordnungsgrad korreliert, bleibt zu überprüfen. In diesem Zusammenhang sollte noch einmal auf das zweite Viereck vierter Ordnung eingegangen werden, das überschlagene doppelt rechtwinkelig-dreiseitige Viereck. Wie für das Quadrat benötigt man lediglich eine Information, entweder die Länge einer der drei gleichlangen Seiten oder die der langen, kreuzenden Seite, um ein spezifisches überschlagenes doppelt rechtwinkelig-dreiseitiges Viereck zu konstruieren. Dies bestätigt somit die Annahme, dass dieses Viereck höchstgeordnet ist. Auch der Flächeninhalt dieses Vierecks lässt sich leicht berechnen, er ist halb so groß wie der eines Quadrates gleicher Seitenlänge. Somit sollte dieses besondere Viereck, dessen Ordnungsgrad so hoch ist wie der eines Quadrates, deutlich mehr Beachtung finden.

Als zukünftige Projekte sollte der hier vorgeschlagene Ansatz erweitert werden. Weiterhin müsste der Ansatz auf weitere geometrische Figuren angewendet werden. Am einfachsten ließe sich dies wahrscheinlich auf Dreiecke ausweiten, da in diesem Fall Dreiecke als entartete Vierecke aufgefasst werden könnten. Weiterhin sollte eine sinnvolle grafisch-didaktische Aufarbeitung des hier vorgestellten Teilsystems erfolgen. Abschließend sollte noch einmal betont werden, dass das hier vorgeschlagene Konzept sich didaktisch sinnvoll für die Herleitung der hierarchischen Beziehungen der Vierecke eignen sollte, da es keinerlei Willkür unterliegt und es somit logisch erfassbar ist.

Danksagungen. Wir möchten unserem Sohn Gideon für seine inspirierenden Fragen danken. Aus den darauf folgenden Gesprächen ist diese Arbeit entstanden.

LITERATUR

[1] L.C. Assis, *Coherence, correspondence, and the renaissance of morphology in phylogenetic systematics*, Cladistics **25** (2009), 528–544.

[2] P. Ax, *Das System der Metazoa I*, Gustav Fischer: Stuttgart, Jena, New York, 1995.

[3] M. De Villiers, *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*, For the Learning of Mathematics **14** (1994), 11–18.

[4] M. De Villiers, *Some Adventures in Euclidean Geometry*, Durban: University of Durban-Westville, 1996.

[5] R. Fritsch, *Bemerkungen zur Viereckslehre*, Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste **19** (1998), 69–94.

[6] T. Fujita, *Learners' understanding of the hierarchical classification of quadrilaterals*, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics **28**(2) (2008), 31–36.

[7] W. Hennig, *Phylogenetic Systematics*, Urbana: University of Illinois, 1966.

[8] A. Heinze, *"... aber ein Quadrat ist kein Rechteck" – Schülerschwierigkeiten beim Verwenden einfacher geometrischer Begriffe in Jahrgang 8*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **34** (2002), 51–55.

[9] B. Kimeswenger, *Visualisierung in der mathematischen Begriffsbildung*, Diplomarbeit, Johannes-Kepler-Universität Linz, 2012.

[10] J. Roth, *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*, Dissertation, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2005.

[11] K. Vogelsberger, *Die abbildungsgeometrische Erschließung im Haus der Vierecke*, Mathematiklehren **60**, 68.

[12] J.-W. Wägele, *Grundlagen der Phylogenetischen Systematik*, Dr. Friedrich Pfeil: München, 2000.

[13] H. Walser, *Vergessene Vierecke*, Arbeitskreis Geometrie, Herbsttagung 14–16. September 2012, Saarbrücken, 2012.

[14] K. Zilkova, *Convex quadrilaterals and their properties in the training of teachers for primary education*, Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics **11** (2011), 73–84.

Ludwig-Maximilians-Universität München, Biozentrum – Department Biologie II, Großhaderner Str. 2, 82152 Planegg-Martinsried, Deutschland

E-mail: joachim.haug@palaeo-evo-devo.info, carolin.haug@palaeo-evo-devo.info