THE TEACHING OF MATHEMATICS
2016, Vol. XIX, No. 2, pp. 57–67

DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ORDNUNGSGRADEN UND KONGRUENZSÄTZEN AM BEISPIEL DES SYSTEMS DER DREIECKE

THE CONNECTION BETWEEN ORDER GRADES AND CONGRUENCE THEOREMS THROUGH THE EXAMPLE OF SYSTEMS OF TRIANGLES

Joachim T. Haug und Carolin Haug

Abstract. Different types of polygons are treated differently, or at least the treatments are differently focused. For triangles, congruence theorems seem to be considered to be important, while for quadrilaterals classification seems to be one of the most important aspects. Recently, we suggested a systematic treatment for quadrilaterals to substitute the often rather arbitrary-appearing common classificatory systems. For this system, we suggested certain characteristics, which lead to subsequently higher ordered quadrilaterals. This approach is generalized here and expanded to be applied also to triangles. The number of ordered triangles is significantly lower than that of quadrilaterals: there are only four, two triangles of first order and two of second order. We furthermore show that the resulting system of triangles is directly linked to the triangle congruence theorems. With this approach, we try to bridge the different ways how triangles and quadrilaterals are treated and aim at a more coherent understanding of geometry.

MathEduc Subject Classification: 97G40

MSC Subject Classification: G44

Key words and phrases: Classification of triangles

Hintergrund

Bei Polygonen verschiedener Eckzahl werden sehr unterschiedliche Fragen in den Vordergrund gestellt. Diese unterschiedliche Behandlungsweise drückt sich sowohl in der rein wissenschaftlichen Betrachtung als auch im Mathematikunterricht aus.

So ist ein zentraler Punkt der Betrachtung von Vierecken deren Klassifikation in verschiedene Typen, welche im deutschsprachigen Raum auch als das "Haus der Vierecke" bekannt ist (z.B. [9, 10]). Ein zentraler Punkt der Betrachtung von Dreiecken sind die sogenannten Kongruenzsätze, die beschreiben, welche Eigenschaften eines spezifischen Dreiecks mindestens gegeben sein müssen um es zweifelsfrei konstruieren zu können (z.B. [7, 8]). In der Erweiterung dessen stehen bekannte Zusammenhänge wie z.B. der Satz des Pythagoras, oder besser seine Verallgemeinerung, der Kosinussatz. Es ist nicht objektiv nachvollziehbar, warum diese beiden Typen von Polygonen derart unterschiedlich behandelt werden.

Haug & Haug [4] stellten für das Haus der Vierecke fest, dass es mehrere propagierte Formen dieser Klassifikation gibt, und dass diese bestehenden Formen mehr oder weniger willkürlich festgelegt erscheinen. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass diese Klassifikationen in der Tat nur einen sehr kleinen Teil der Vielfalt der Vierecksformen betrachten. Das Fehlen einer Kohärenz der meisten bestehenden Viereckslassifikationen bzw. ihre Willkürlichkeit könnte darüber hinaus erklären, warum diese auf Unverständnis oder Widerstände bei den Schülern stoßen (z.B. [2, 3, 6]). Haug & Haug [4] schlugen daher ein kohärentes, nicht-willkürliches (Teil-)System der Vierecke vor, bei dem sich die Elemente des Systems und ihre Eigenschaften gegenseitig bedingen.

In der Verallgemeinerung dieses Ansatzes soll hier ein äquivalentes System der Dreiecke aufgestellt werden. Wie wir zeigen werden, steht dieses System im direkten Zusammenhang mit den in der Dreieckslehre als wichtig erachteten Kongruenzsätzen. Des Weiteren sollen damit auch scheinbare Unterschiede zwischen Dreiecksgeometrie und Vierecksgeometrie überbrückt und somit ein insgesamt kohärenteres Verständnis für Geometrie ermöglicht werden.

Vorgehensweise

Wie für Vierecke aufgezeigt ([4]) beginnen wir mit einem einfachen Satz von drei Eigenschaften: Winkelgleichheit, Längengleichheit und spezifische Lagebeziehung. Bei Vierecken treten diese Eigenschaften jeweils in Paaren auf, also Winkelgleichheit bei nebeneinander liegenden oder gegenüber liegenden Winkel, Längengleichheit bei nebeneinander oder gegenüber liegenden Seiten und spezifische Lagebeziehung nebeneinander liegender (rechter Winkel) oder gegenüber liegender Seiten (parallel). Bei Dreiecken entfällt diese Unterscheidung nach Paaren; Winkel und Seiten sind immer benachbart, parallele Seiten treten nur bei Dreiecken auf, die zur Strecke entartet sind. Die Eigenschaften werden dann in einer Serie von Eigenschaftsmatrices kombiniert. Die Variabilität der Dreiecke ist auch noch in anderer Hinsicht geringer als bei Vierecken. Es gibt nur konvexe Dreiecke, nicht wie bei Vierecken zusätzlich konkave oder überschlagene Formen.

Ergebnisse

Als Dreiecke erster Ordnung entstehen mit den oben genannten Eigenschaften nur zwei Typen von Dreiecken (Abb. 1). Sowohl die Eigenschaft 'gleiche Winkel', als auch die Eigenschaft 'gleiche Seitenlängen' erzeugen das gleichschenkelige Dreieck. Als zweites Dreieck erster Ordnung entsteht das rechtwinkelige Dreieck.

In der weiteren Kombination entstehen zwei Dreiecke zweiter Ordnung (Abb. 1). Als wohl bekannteste Form entsteht das gleichseitige Dreieck. Es entsteht bei den Eigenschaften zweimal 'gleiche Winkel' und zweimal 'gleiche Seitenlängen'. Bei der Kombination 'gleiche Winkel' und 'gleiche Seitenlängen' landet man wieder beim gleichschenkeligen Dreieck. Die Kombination zweimal 'rechter Winkel' hat keine Lösung als ebenes Dreieck. Als zweites Dreieck zweiter Ordnung entsteht das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck. Das hier erzeugte System der (geordneten)

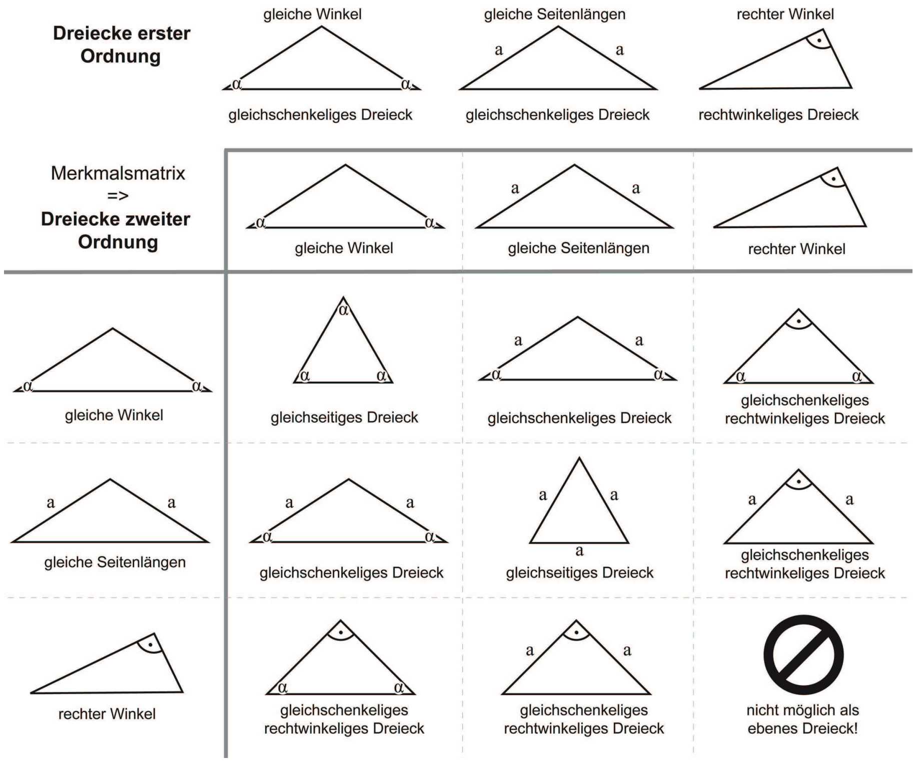

Abb. 1. Herleitung der Dreiecke verschiedener Ordnung. Dreiecke erster Ordnung entstehen durch einfache Anwendung der Eigenschaften gleiche Winkel, gleiche Seitenlänge, rechter Winkel. Dreiecke zweiter Ordnung entstehen durch Kombination dieser Merkmale.

Dreiecke hat somit nur vier Elemente: zwei Dreiecke erster Ordnung und zwei Dreiecke zweiter Ordnung.

Vergleich mit der "klassischen" Klassifikation der Dreiecke

Wie gesagt spricht man bei Dreiecken normalerweise nicht von einer klassischen Klassifikation wie bei Vierecken. Trotzdem gibt es zumindest drei relativ häufig betrachtete Sonderformen: das gleichschenkelige Dreieck, das gleichseitige Dreieck und das rechtwinkelige Dreieck. Alle diese sind im hier vorgestellten System enthalten. Darüber hinaus gibt es mit dem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck ein weiteres hochgeordnetes Dreieck, das seltener speziell angesprochen wird, aber durchaus vorkommt (z.B. [1]). Allerdings fehlt es selbst solchen vollständiger erscheinenden Klassifikationen oft an Kohärenz. So wird weiterhin klassisch nach spitzwinkeligem und stumpfwinkeligem Dreieck unterschieden (was keinen weiteren Ordnungsgrad einführt), aber zum Beispiel bei der Darstellung in [1] wird das gleichschenkelige Dreieck nur aus einem spitzwinkeligem Dreieck abgeleitet, obwohl auch aus einem stumpfwinkeligen Dreieck ein gleichschenkeliges abgeleitet werden kann. Zusätzlich ergibt sich aus diesem angedeuteten System ein Hierarchieproblem: das rechtwinkelige Dreieck stünde dabei zwischen spitz- und stumpfwinkeligem Dreieck, und damit quasi eine Ebene unter dem gleichseitigen Dreieck ([1, S. 244]). Wie im Folgenden weiter ausgeführt, wäre eine solche Hierarchie nicht schlüssig.

Eigenschaften der geordneten Dreiecke

Haug & Haug [4] wiesen bereits bei den Vierecken drauf hin, dass es einen möglichen Zusammenhang zwischen Ordnungsgrad und hinreichender Anzahl von Angaben zur eindeutigen Konstruktion gibt: je höher ihre Ordnung ist, umso weniger Eigenschaften müssen gegeben sein um spezifische Vertreter zu konstruieren. So ist für die Konstruktion von Vierecken höchster (vierter) Ordnung, also Quadrat und überschlagenes doppelt-rechtwinkeliges dreiseitiges Viereck ([5]), lediglich die Angabe einer einzigen Länge erforderlich. Bei Vierecken dritter Ordnung sind zwei Angaben hinreichend. Für die Konstruktion eines spezifischen Rechtecks (welches kein Quadrat sein darf) genügt die Angabe zweier Längen, für die Konstruktion einer spezifischen Raute (welche kein Quadrat ist) die Kantenlänge sowie ein Winkel. Für Vierecke zweiter Ordnung bräuchte man dann drei Angaben. Die Konstruktion eines spezifischen Parallelogramms oder eines Drachenvierecks (welche nicht weiter spezialisiert sind) erfordert beispielsweise die Angabe zweier Längen und eines Winkels. Es bleibt jedoch zu beweisen, ob dieses Muster in der Tat für alle Vierecke zutrifft.

Mit dieser Betrachtung können wir aber nun bei den Dreiecken einsteigen. Die Kongruenzsätze zeigen uns, dass ein beliebiges (ungeordnetes) Dreieck mit der Angabe von nur drei Eigenschaften, in spezifischer Anordnung zueinander, zweifelsfrei konstruiert werden kann. Bei Dreiecken erster Ordnung sollten somit zwei Angaben genügen. Dies werden wir nun für die beiden Dreiecke erster Ordnung überprüfen.

Gleichschenkeliges Dreieck (Abb. 2)

1.) Sind zwei Seitenlängen bekannt, kann das Dreieck eindeutig konstruiert werden, wenn es sich dabei um die Länge der Basis und eines Schenkels handelt (BS-Fall). Für die Konstruktion wird die Länge der Basis abgetragen und dann Kreise mit den Längen der Schenkel (die ja identisch sind) über den Endpunkten der Basis geschlagen; der Schnittpunkt (eigentlich die Schnittpunkte) ist die Spitze des Dreiecks.

2.) Sind die Längen der beiden Schenkel gegeben, lässt sich kein eindeutiges Dreieck konstruieren. Genau genommen handelt es sich dann aber nicht um die Angabe zweier unabhängiger Informationen (siehe auch weiter unten zum WWW-Fall).

3.) Ist die Basis und ein Basiswinkel gegeben (BBw), ist die Konstruktion eindeutig möglich. Die Länge der Basis wird abgetragen und an beiden Seiten der gegebene Winkel übertragen (im einfachsten Fall über Dreieckskonstruktion mit drei übertragenen Längen); die Schenkel schneiden sich dann in der Spitze.

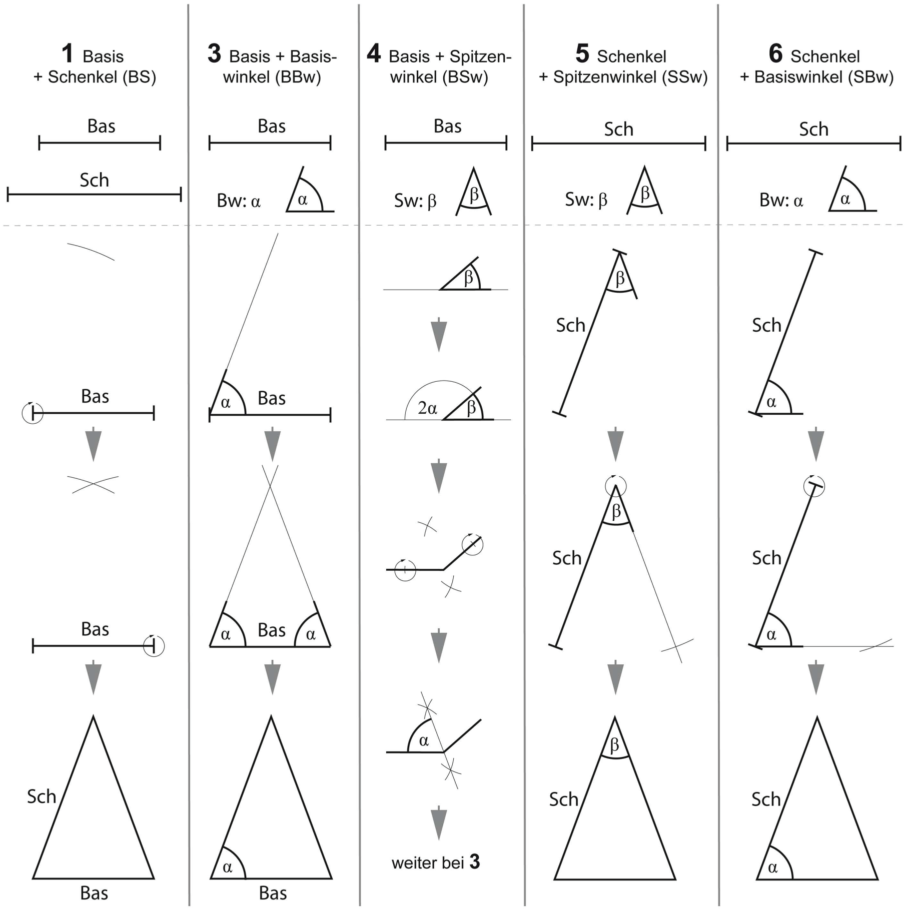

Abb. 2. Konstruktion des gleichschenkeligen Dreiecks bei verschiedenen Angaben. Die fett gedruckten Zahlen beziehen sich auf die im Text ausgeführten Fälle.

4.) Ist die Basis und der Spitzenwinkel gegeben (BSw), konstruiert man am besten den Ergänzungswinkel zu 180 Grad, halbiert diesen und überträgt ihn an die beiden Enden der Basis. Wiederum gibt der Schnittpunkt die Spitze des Dreiecks.

5.) Ist die Länge eines Schenkels gegeben und der Spitzenwinkel (SSw), überträgt man den Winkel am einen Ende des Schenkels, dann überträgt man die Länge des Schenkels. Durch Verbinden der Endpunkte der Schenkel erhält man die Basis.

6.) Ist die Länge des Schenkels und der Basiswinkel gegeben (SBw), so überträgt man den Winkel an der einen Seite des Schenkels und zieht einen Kreis mit dem Radius der Länge des Schenkels um den anderen Endpunkt. Der Schnittpunkt ergibt den dritten Punkt des Dreiecks.

7.) Sind lediglich zwei Winkel gegeben (WW-Fall), so lässt sich wiederum kein eindeutiges Dreieck konstruieren. Hier muss jedoch gesagt werden, dass es sich um das gleiche Problem handelt wie beim beliebigen Dreieck und der Angabe von drei Winkeln (WWW), welches ebenfalls keine eindeutige Konstruktion erlaubt. Genau genommen handelt es sich beim WWW-Fall aber nicht um eine echte Angabe von drei Informationen, denn die Kenntnis von zwei Winkeln im Dreieck erlaubt die Konstruktion des dritten. Die Angabe des dritten Winkel stellt somit keine echte weitere Angabe dar und es verwundert damit auch nicht, dass eine eindeutige Konstruktion nicht möglich ist. Gleiches gilt hier für das gleichschenkelige Dreieck, denn hier reicht die Angabe eines einzigen Winkels (und die Information ob es ein Basiswinkel oder der Spitzenwinkel ist) um die anderen Winkel zu konstruieren. Die Angabe eines zweiten Winkels ist somit keine weitere Information.

Rechtwinkeliges Dreieck (Abb. 3)

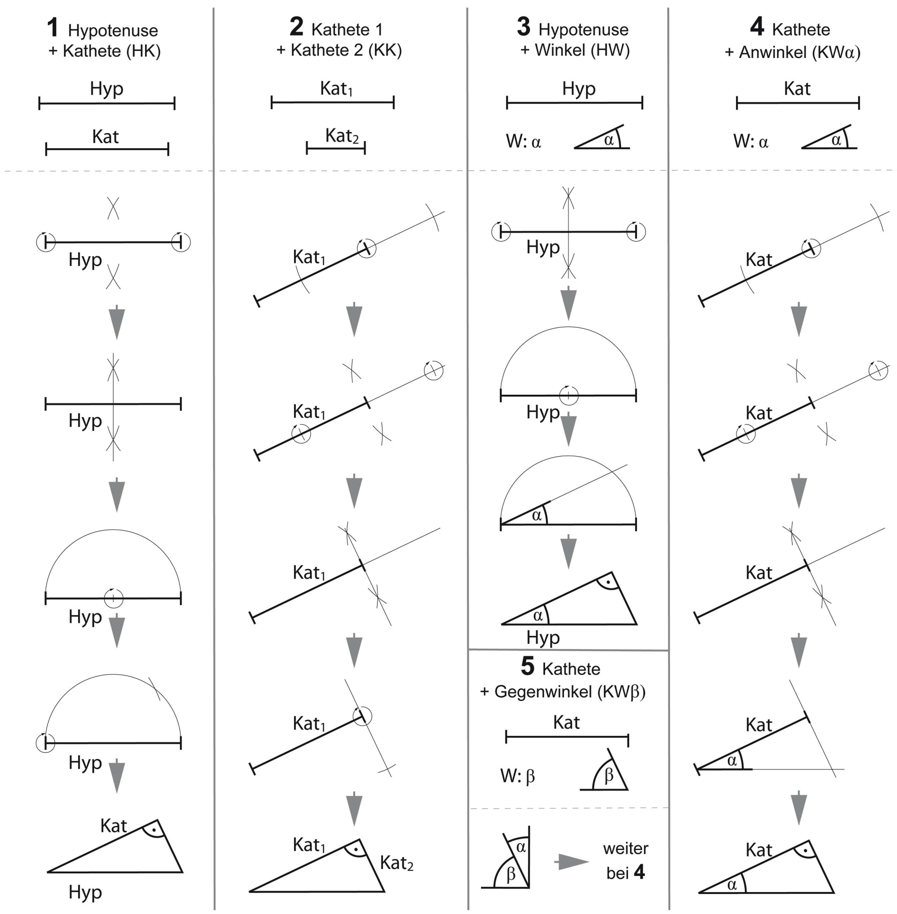

Abb. 3. Konstruktion des rechtwinkeligen Dreiecks bei verschiedenen Angaben. Die fett gedruckten Zahlen beziehen sich auf die im Text ausgeführten Fälle.

1.) Sind zwei Seiten gegeben, lässt sich das rechtwinkelige Dreieck konstruieren, jedoch abhängig davon, welche Seiten gegeben sind, auf verschiedene Weisen. Ist die Hypotenuse und eine Kathete gegeben (HK), so zieht man einen Thaleskreis über der Hypotenuse (die man zunächst mit der Mittelsenkrechten geteilt hat) und schlägt einen Kreis mit Radius der Länge der bekannten Kathete um einen Endpunkt der Hypotenuse. Wo dieser Kreis den Thaleskreis schneidet, befindet sich die Spitze des Dreiecks.

2.) Sind die Längen der beiden Katheten (KK) gegeben, trägt man zunächst die Länge einer ab, konstruiert einen rechten Winkel an einem Endpunkt und trägt dann die Länge der anderen Kathete ab. Die freien Enden der Katheten sind die Endpunkte der Hypotenuse.

3.) Ist die Länge der Hypotenuse sowie ein Winkel (HW) gegeben, so trägt man den Winkel an einem Endpunkt ab und konstruiert den Thaleskreis. Der Schnittpunkt ist wiederum die Spitze des Dreiecks.

4.) Ist die Länge einer Kathete sowie des Anwinkels (KWα) gegeben, wird dieser Winkel am einem Endpunkt der Kathete übertragen und am anderen Endpunkt eine Senkrechte konstruiert. Der Schnittpunkt markiert den dritten Punkt des Dreiecks.

5.) Ist die Länge einer Kathete sowie des Gegenwinkels (KWβ) gegeben, so konstruiert man den Ergänzungswinkel zu $90°$. Dadurch erhält man den Anwinkel (α) und kann wie unter 4.) konstruieren.

6.) Die Angabe zweier Winkel (WW) lässt wiederum keine eindeutige Konstruktion zu. Wie oben festgestellt, stellt dies wiederum keine unabhängige Angabe von zwei Eigenschaften dar.

Für die beiden Dreiecke erster Ordnung können wir somit feststellen, dass in der Tat Kongruenzsätze mit lediglich zwei (unabhängigen) Angaben genügen um sie zweifelsfrei konstruieren zu können.

Bei den Dreiecken zweiter Ordnung müsste die Angabe einer Eigenschaft ausreichen um einen Vertreter eindeutig zu konstruieren:

Gleichseitiges Dreieck (Abb. 4)

Für das gleichseitige Dreieck genügt in der Tat die Angabe einer Länge. Man schlägt dann Kreise über den Endpunkten der Basis mit dem Radius gleich der Länge der Basis und erhält damit die Spitze des Dreiecks.

Gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck (Abb. 4)

Auch für das gleichschenkelig rechtwinkelige Dreieck genügt die Angabe einer Seite.

1.) Ist eine Kathete gegeben, so konstruiert man eine Senkrechte über einem Endpunkt und übertragt die Länge der Kathete. Die Strecke zwischen den beiden "freien" Enden der Katheten entspricht dann der Hypotenuse.

2.) Ist die Hypotenuse gegeben, so konstruiert man eine Mittelsenkrechte und den Thaleskreis. Diese schneiden sich in der Spitze des Dreiecks.

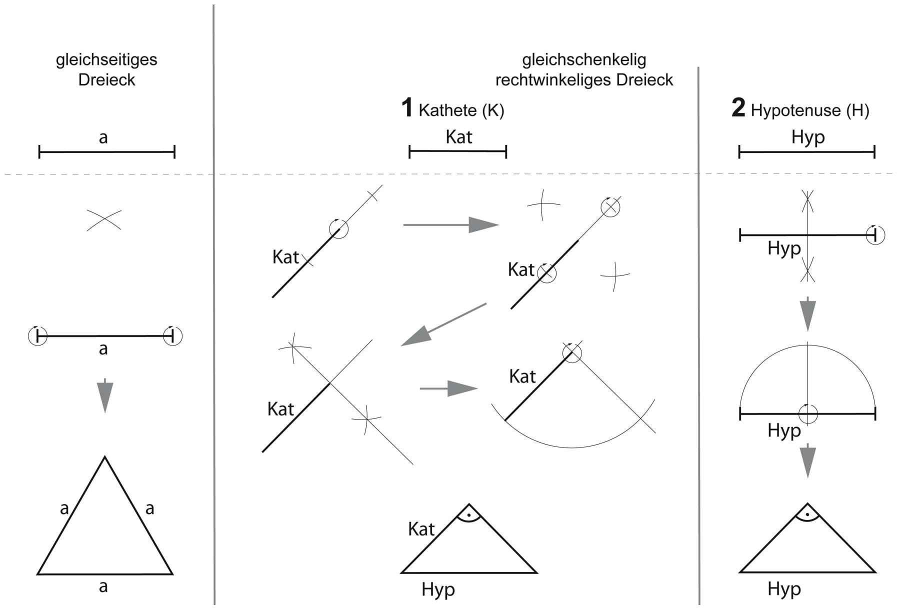

Abb. 4. Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks und des gleichschenkelig rechtwinkeligen Dreiecks bei verschiedenen Angaben. Die fett gedruckten Zahlen beziehen sich auf die im Text ausgeführten Fälle.

Somit scheint es auch zuzutreffen, dass für Dreiecke zweiter Ordnung lediglich eine Angabe erforderlich ist. Das hier hergeleitete System der Dreiecke erscheint somit nicht nur in sich kohärent, sondern es nimmt direkt Bezug zu den Kongruenzsätzen.

Auch wenn das System aufgrund der geringen Anzahl von Elementen im Vergleich zum System der Vierecke sehr einfach erscheint, lassen sich hier wie bei Vierecken hierarchische Beziehungen erkennen. So ist das gleichseitige Dreieck ein Sonderfall des gleichschenkeligen Dreiecks. Das gleichschenkelig rechtwinkelige Dreieck ist, wie der Name bereits sagt, sowohl ein Sonderfall des gleichschenkeligen Dreiecks als auch des rechtwinkeligen Dreiecks.

Mit dem hier gezeigten Ansatz soll betont werden, dass Dreiecksgeometrie und Vierecksgeometrie nicht etwas grundsätzlich Verschiedenes ist, sondern dass in beiden Fällen die selben Fragestellungen möglich sind. In logischer Konsequenz bleibt nun zu überprüfen, ob die entsprechenden Formen der Kongruenzsätze auch bei Vierecken gelten wie oben dargelegt.

Sinn oder Unsinn der Ordnungsgrade

Man könnte die Ansicht vertreten, dass die Diskussion von notwendigen Eigenschaften für die zweifelsfreie Konstruktion bei Polygonen verschiedener Ordnung auch trivial sei. Man könnte es nämlich auch so sehen, dass immer gleich viele

Eigenschaften notwendig sind um ein Dreieck zu konstruieren, drei unabhängige Informationen. Damit schließt sich nicht nur der bereits erwähnte WWW-Fall aus. Es erklärt auch, warum man beim gleichschenkeligen Dreieck nur noch zwei Angaben braucht: Eine Angabe wurde schon durch die Festlegung dieses speziellen Dreieckstyps gemacht. Beim gleichseitigen Dreieck sind imVorfeld bereits zwei Angaben gemacht worden, damit ist nur noch eine Angabe notwendig. Somit wären es stets drei Angaben, die nur sozusagen zu teils verschiedenen Zeiten gemacht werden.

Dies sollte nun bei den Vierecken weiter überprüft werden. Wenn diese Annahme korrekt wäre, müssten hier immer fünf Eigenschaften notwendig sein: ein Quadrat wird durch vier Eigenschaften festgelegt (4. Ordnung) und man braucht eine Angabe, ein Rechteck wird durch drei Eigenschaften festgelegt (3. Ordnung) und man braucht zwei Angaben um es zweifelsfrei konstruieren zu können. Dies für alle Vierecke und alle möglichen Angabenkombinationen zu eruieren wird sicherlich noch einige Zeit in Anspruch nehmen (Arbeit in Vorb.). Dies würde somit einer Herleitung der Kongruenzsätze der Vierecke entsprechen.

Unser Ansatz zeigt, dass der vermeintlich grundlegende Unterschied in der Dreiecks- und Vierecksgeometrie eigentlich keiner ist. Die "Klassifikation", oder besser Systematisierung, bei Vierecken und die Kongruenzsätze bei Dreiecken hängen direkt miteinander zusammen. Daher sollte man hier wiederum Kohärenz anstreben und Systematisierung und Kongruenzsätze im Zusammenhang sowohl bei Dreiecken als auch bei Vierecken betrachten.

Weitere Eigenschaften

Haug & Haug [4] haben dargelegt, dass die drei auch hier verwendeten Eigenschaften nur eine mögliche Auswahl darstellen und man weitere hinzuziehen könnte. Es bleibt jedoch festzustellen, dass sich mit diesen Eigenschaften sowohl bei Vierecken, als auch, wie hier gezeigt, bei Dreiecken der vollständige klassische Kanon von Formen erzeugen lässt (darüber hinaus aber auch viele zusätzliche Formen von Vierecken). Somit scheint dieser Satz von Eigenschaften nicht grundlegend falsch gewählt zu sein.

Aber es wäre eben auch denkbar weitere Eigenschaften hinzuzunehmen. Besonders aus dem Vergleich mit den Dreiecken kann man versuchen hier Eigenschaften abzuleiten. Inkreis und Umkreis sind mögliche Eigenschaften von Vierecken, die aber alle Dreiecke von Haus aus besitzen. Spezielle Teilungsverhältnisse oder Orientierungen der Diagonalen sind ebenfalls interessante Merkmale von Vierecken, bei Dreiecken gibt es jedoch keine Diagonalen (oder besser gesagt: sie fallen mit den Seiten zusammen). Bei Dreiecken betrachtet man häufig Höhen, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende, Eigenschaften, die man bisher bei Vierecken eher nicht beachtet hat.

Ein Dreieck höchster Ordnung ist das gleichseitige Dreieck, und eine seiner wichtigsten Eigenschaften ist der 60° Winkel. Könnten denn nicht Vierecke mit 60° Winkeln auch besonders geordnet sein? Oder könnten Vierecke, die sich in gleichseitige Dreiecke zerlegen lassen, hoch geordnet sein, wie die Raute mit 60°

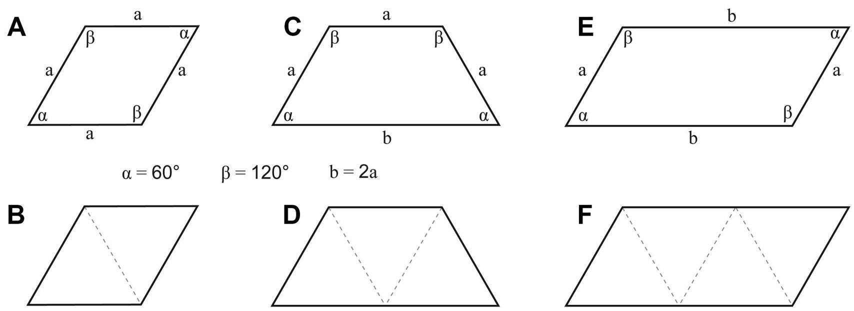

Abb. 5. Vierecke, die aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, daher mit 60° und 120° Winkeln. A. Raute. B. Wie A mit eingezeichneten gleichseitigen Dreiecken. C. Dreiseitiges gleichschenkeliges Trapez. D. Wie C mit eingezeichneten gleichseitigen Dreiecken. E. Parallelogramm mit Seitenverhältnissen 2 : 1. F. Wie E mit eingezeichneten gleichseitigen Dreiecken.

und 120° Winkeln (Abb. 5A), welche im Prinzip einfach aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht (Abb. 5B), oder auch das dreiseitige achsensymmetrische Trapez mit den gleichen (60° und 12°) Winkeln (Abb. 5C), welches aus drei gleichseitigen Dreiecken besteht (Abb. 5D)? Diese Vierecke könnte man mit der Angabe einer einzigen Länge konstruieren.

Momentan ist es schwierig zu argumentieren, dass der 60° Winkel für alle beliebigen Polygone speziell ist (für Dreiecke erscheint das sicher so). Man könnte dann nämlich auch weiter gehen und den 45° Winkel oder den 30° Winkel hinzunehmen, die sich ebenfalls einfach konstruieren lassen. Auch bei Längen wäre ein "Aufweichen" möglich: so könnte man neben Längengleichheit auch spezielle Verhältnisse, die einfach konstruierbar sind, zulassen. In Erweiterung der Beispiele von Vierecken, die aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, könnte man das Parallelogramm mit den Seitenverhältnissen 1 : 2 und 60° und 120° Winkeln nennen (Abb. 5E), welches sich aus vier gleichseitigen Dreiecken konstruieren lässt (Abb. 5F).

Diese Eigenschaften, 30°, 45°, 60°, Längenverhältnisse 1 : 2, sind unbestreitbar "weicher" als die ursprünglichen drei Eigenschaften und haben damit wohl nicht das Potential ähnlich strikt geordnete Polygone zu erzeugen. Außerdem bergen diese Merkmale die Gefahr als willkürlich angesehen zu werden, eben weil etwa der 60° Winkel sich nicht aus den klassischen Vierecken als wichtige Eigenschaft eruieren lässt. Er ist nicht einmal notwendig um das gleichseitige Dreieck zu erzeugen, wie hier gezeigt wurde. Die drei ursprünglichen Merkmale sind hierfür hinreichend. Weitere Ansätze unter Einbezug anderer Polygone werden zeigen, wie universell nützlich die drei Merkmale gleiche Winkel, gleiche Länge und fixe Lagebeziehung tatsächlich sind.

Danksagungen

Wir danken Gideon T. Haug, Neuried, und J. Matthias Starck, München, für anregende Diskussionen und Unterstützung.

REFERENZEN

[1] R. Bittner, D. Dieter, S. Kubicek, W. Tietz, *Kompendium der Mathematik. Kapitel 11. Vierecke*, Springer-Verlag, Wiesbaden, 1970.

[2] M. De Villiers, *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics **14** (1994), 11–18.

[3] T. Fujita, *Learners' understanding of the hierarchical classification of quadrilaterals*, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics **28** (2) (2008), 31–36.

[4] J.T. Haug, C. Haug, *Von der Klassifikation der Vierecke zum System der Vierecke*, The Teaching of Mathematics **18** (2015), 1–15.

[5] J.T. Haug, C. Haug, *Der Cousin des Quadrates – die Charakterisierung des überschlagenen doppelt-rechtwinkligen Vierecks*, Die Wurzel 9 + 10 (2016), 220–225.

[6] A. Heinze, *"... aber ein Quadrat ist kein Rechteck" – Schülerschwierigkeiten beim Verwenden einfacher geometrischer Begriffe in Jahrgang 8*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **34** (2002), 51–55.

[7] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Teubner, Leipzig, 1899 (2. Aufl. 1903, 4. Aufl., 1913, 7. Aufl., 1930, 1968, 14. Aufl., 1999).

[8] L. Oettinger, *Lehrbuch der reinen Mathematik: Lehrbuch der gesammten Geometrie, Band 2.*, Gebrüder Groos, Freiburg, 1838, 402 Seiten.

[9] K. Vogelsberger, *Die abbildungsgeometrische Erschließung im Haus der Vierecke*, Mathematiklehren **60** (1993), 68.

[10] H. Walser, *Vergessene Vierecke*, Arbeitskreis Geometrie, Herbsttagung 14–16. September 2012, Saarbrücken.

Ludwig-Maximilians-Universität München, Biozentrum – Department Biologie II, Großhaderner Str. 2, 82152 Planegg-Martinsried, Deutschland

E-mail: joachim.haug@palaeo-evo-devo.info, carolin.haug@palaeo-evo-devo.info