THE TEACHING OF MATHEMATICS
1999, Vol. II, 2, pp. 119–129

«ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА» ФЕЛИКСА КЛЕЙНА И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА РЕФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Григорий Давидович Глейзер

Abstract. The article is devoted to the 125th anniversary of the Erlangen program of F. Klein. Its outstanding importance for development of mathematical science and for formation of the modern mathematical concepts is pointed out. The influence of the Erlangen program on creation of natural-scientific representations, first of all physical, is analyzed. The special attention is given to the role the Erlangen program has played in the history of mathematical education in schools and universities.

AMS Subject Classification: 00 A 35

В начале несколько слов об авторе «Эрлангенской программы». Имя Феликса Клейна (F. Klein, 1849–1925 гг.) выдающегося математика и педагога, реформатора математического образования, – хорошо известно математикам и всем, кто связан с математическим образованием во всем мире. Российские преподаватели математики знакомы со многими работами Ф. Клейна, многие из которых переведены на русский язик. Особенно известен его двухтомник «Элементарная математика с точки зрения высшей» [4], представляющий собой курс лекций, прочитанных Ф. Клейном в Геттингенском университете в 1907/08 учебном году будущим учителям математики средних учебных заведений. Организация этого курса находилась в тесной связи с деятельностю Ф. Клейна по реформированию математического образования в средней школе. Ныне мы попытаемся показать, насколько реформаторские идеи Ф. Клейна были прогрессивны для образования начала XX века и, что особенно удивительно, – многие из них не потеряли свое актуальности в конце этого столетия. Реформаторские идеи Ф. Клейна нашли свое выражение во многих работах самого Ф. Клейна и других авторов. С некоторыми из этих работ, переведенными на русский язык, учителям полезно ознакомиться. Ф. Клейн принадлежит к числу классиков в области математики и математического образования. Эго идеями существенно обогащены обе эти сферы интеллектуальной человеческой деятельности, благодаря им в значительной степени определен современный облик как самой математики, так и методики ее преподавания в высшей и средней школах. Ф. Клейн один из тех, кто разработал изящную модель неевклидовой геометрии, тем самым подтвердив правовременость идей Лобачевского о возможности существования принципиально разных геометрий, чем особенно и завершились многовековые попытки «доказательства» пятого постулата Евклида. Думаю, не существует современного математика которому бы не была известна «Эрлагнгенская программа» Феликса Клейна, которой, собственно, посвящена эта статья. В ней на основе предложенного Ф. Клейном группового подхода объединены, охвачены единым общим принципом казавшиеся ранее совершенно различные ветвы геометрической науки: евклидова, аффинная, проективная геометрия, гиперболическая геометрия Лобачевского, эллиптическая геометрия Римана, ряд других геометрий, наконец, топология. Ф. Клейну принадлежат и другие выдающиеся открытия: вместе с великим французским математиком Пуанкаре он заложил основы теории автоморфных функций, внес весомый вклад в теорию римановых поверхностей многозначных аналитических функций, теорию функций комплексной переменной (клейновы группы), один из первых привел пример односторонних поверхностей (так называемая бутылка Клейна) и многие другие.

Среди многих выдающихся математических работ «Эрлагнгенская программа» Ф. Клейна выделяется своей методологической направленностю, высочайшим уровнем теоретического обобщения, особой ценностью научного предвидения в развитии математики. В ней проанализирована и синтезирована история развития геометрических идей и на этой основе определен один из основных приоритетных путей ее развития на сто лет вперед, вплоть до нашего времени. «Эрлагнгенская программа» – под таким названием вошел в математику доклад «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», который сделал Ф. Клейн в октябре 1872 года, вступая в должность профессора Эрлангенского университета. По существовавшей тогда традиции (которую, кстати, неплохо было бы возродить и в российских университетах), ученый, вступая в должность профессора, должен был выступить с программным докладом своей научной или педагогической деятельности. Этот доклад предварительно еще до вступления автора в напечатанном виде распространялся среду ученых, преподавателей университета, коллег автора. Примерно за полгода до своего выступления Ф. Клейн сдал в печать свой доклад, в котором содержались основные идеи «Эрлангенской программы». Ведущую идею, сущность «Эрлангенской программы» Ф. Клейа, предельно точно охарактеризовал Э. Картан [8, с. 486]:

> «Как известно, основная идея Ф. Клейна может быть связана с наиболее древними понятиями науки. Элементарная геометрия изучает свойства фигур, которые не зависят от их частного положения в пространстве. Прошло немало столетий, прежде чем эта несколько неопределенная формулировка была переведена на точный язык: свойства, изучаемые элементарной геометрией, являются теми, которые остаются инвариантными относительно некоторой совокупности преобразований, образующей группу движения ... Проективная геометрия, являющаясь одной из глав элементарной геометрии и превращается при дополнительном развитии в самостоятельную научную дисциплину, с точки зрения Клейна есть изучение свойств фигур, инвариантных относительно некоторой совокупности преобразований (проективных преобразований), образующих группу.
>
> Вообще, всякая группа непрерывных преобразований определяет самостоятельную геометрию. Эта геометрия, если рассматривать пере-

менные, преобразуемые группой, как величины, определяющие точки пространства соответствующего числа измерений, изучает свойства фигур, инвариантные относительно преобразований группы G, причем эти последние играют такую же роль, как движения в евклидовой геометрии или проективные преобразования в геометрии проективной. Группа G называется фундаментальной группой данной геометрии. Таким образом, получается аффинная геометрия, конформная или анналагматическая геометрия, геометрия Лагерра, эрмитова и т.д.»

Вообще, сущность идеи, провозглашенной Ф. Клейном в «Эрлангенской программе», в абстрактном виде достаточно прозрачна и состоит в следующем: пусть имеется некоторое основное множество M, элементы которого именуются точками, и на этом множестве задана некоторая группа G преобразований, каждое из которых отображает множество M на себя; свойства геометрических фигур, инвариантные при свех преобразованиях, принадлежщих группе G, и составляет предмет геометрии, определяемой на множестве M группой G. Здесь под геометрической фигурой понимается подмножество основного множества M, под преобразованием – обратимое (т.е. взаимно-однозначное) отображение множества M на себя, под группой G преобразований – непустое множество преобразований, композиция которых, а также обратные преобразования имеют смысл и принадлежат G.

Итак, в сответствии с «Эрлангенской программой» Ф. Клейна геометрия – это наука, изучающая инварианты групп геометрических преобразований.

Ф. Клейн следующим образом формулирует эту мисль: «Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы» и чуть ниже «Дано многообразие и в нем группа преобразований; требуется развить теорию инвариантов этой группы» [1, с. 402]. В этих словах – вся сущность квинтэссенция «Эрлангенской программы».

С точки зрения Ф. Клейна геометрические свойства фигур – такие их свойства и числовые характеристики, которые сохраняются при любых преобразованиях группы G, то есть под геометрическими свойствами фигур понимаются инварианты группы преобразований. Совокупность же положений о свойствах фигур и величинах, которые не меняются при любых преобразованниях группы G Ф. Клейн считает геометрией – наукой об инвариантах группы геометрических преобразований. Таким образом в отличие от Д. Гильберта, положившего в основу геометрии структуру пространства, определяемую некоторой системой аксиом, Ф. Клейн в основу геометрии того или иного пространства кладет соответствующую группу преобразований. На рисунке при помощи логических кругов Эйлера представлена одна из возможных классификаций геометрии с групповой точки зрения. В связи с приведенной классификацией, думаю полезно сделать еще одно разъяснение. Современную геометрию понимают как теорию структур, более богатых, чем структура топологического многообразия. Поясню эту мысль. Известно, что топологическое многообразие считают однородным пространством (пространством Клейна), если в нем определена транзитивная группа

G гомеоморфизмов этого пространства на себя. Группу G называют фундаментальной группой такого пространства.

Гомеоморфизм f пространства M на себя, сохраняющий структуру этого пространства, называют автоморфизмом пространства M. Множество всех автоморфизмов пространства является группой. Всякое свойство фигур данного пространства, индуцированное структурой этого пространства, сохраняется при любых автоморфизмах этого пространства. Если X – однородное пространство с фундаментальной группой G, то группа G как раз и является его группой автоморфизмов. Таким образом, всякое свойство фигур однородного пространства, инвариантное относитель но преобразований фундаментальной группы, есть свойство, индуцированное структурой пространства. Следовательно, точки зрения Д. Гильберта и Ф. Клейна на геометрию совпадают в случае однородного пространства. Вместе с тем, сейчас известны такие пространства, группы автоморфизмов которых не транзитивны (например, пространства аффинной связности в общем случае, когда группа его автоморфизмов состоит из одного тождественного преобразования). Такие пространства, имея богатую геометрию с точки зрения Гильберта, не укладывается в схему Клейна. Таким образом, взгляд на геометрию как на теорию структур более богатых, чем структура топологического пространства, является обобщением точки зрения Феликса Клейна на предмет геометрии, изложенной в его знаменитой «Эрлангенской программе».

Ф. Клейн был не только выдающимся математиком, талантливым попуяризатором математики, но и признанным реформатором математического образования мирового масштаба, одним из идейных вдохновителей и руководитилей реформаторского движения в области математического образования в Германии на рубеже XIX–XX веков, одним из авторов так называемых «Меранских программ», сущность которых состояла в следующем: преподавание математики должно строиться на основе учета психологических особеностей обучаемых и психологических закономерностях усвоения математических знаний, весь учебный материал должен бить проникнут идеей функциональной зависимости величин в их геометрическом освещении, учащиеся должны систематически знакомится с приложениями математики (читатель может ознакомиться с реформаторской деятельностью Ф. Клейна по приложению I «Развитие реформы преподавания математике в Германии», содержащемуся в первом–третьем русском издании первого тома книги [2], к сожалению, исключенном в четвертом издании).

Проекты реформирования школьного и вузовского преподавания математики, разработанные под руководством и при личном участии Ф. Клейна общеизвестны и общепризнанны. Лучшие его идеи реализованы, но некоторые принципиально важные идеи, особенно относящиеся к реформированию геометрического образования, до сих пор актуальны и ждут своего воплощения в школьную практику, хотя были высказаны более века тому назад. Остановимся вкратце на характеристике таких идей Ф. Клейна.

1. Реформаторская деятельность Ф. Клейна в области математического образования проходила в Германии, где классицизм пустил глубокое корни. Германская гимназия была школа филологического типа, реализующей обширные программы по древним языкам. Вековая традиция закрепила только за этим типом общеобразовательной школы подготовку в высшие учебные заведения. Старая германская гимназия давала своим выпускникам по математике и естествознанию только ничтожную скудный объем сведений. Несмотря на то, что позднее в Германии были учреждены так называемые реальные гимназии, в которых программы по математике были расширены и изучалася только один из древних языков, а затем и высшие реальные училища, в которых древние языки не изучались вовсе, прямой доступ в высшие учебные заведения был сохранен только выпускникам классических гимназий. Сущность реформаторской деятельности, приводимой в начале века в Германии под руководством Ф. Клейна, в первую очередь, сначала в признании образования, основанного на естествознании и математики, совершенно равноправным с классическим образованием.

В России под влиянием реформаторских идей Ф. Клейна (Германия) и Э. Бореля (Франция) происходили схожие процессы. В конечном счете в общеобразовательных школах России и позднее Советского Союза сложилось разумное сочетание между гуманитарным и естественно-математическим образоваием. Анализ учебных планов российских общеобразовательных учебных заведений за последние 90–100 лет показывает, что суммарно на эти циклы предметов учебное время разделялось примерно поровну, что говорить о сложившемся в России равновесии гуманитарного и естественно-математического образоваия. Идеи Ф. Клейна о равноправии гуманитарного и естественно-математического образоваия в Германии, высказанные им в начале XX века, неожиданно стали актуальны в России сейчас, в самом конце этого века. С падением тоталитарного режима в России, развитием демократических начал в обществе и образовании, естественно, началась борьба за гуманизацию образования. Этот процесс вызван угрозой дегуманизации человека, ограблением природных ресурсов, разрушением природной среды, наконец, угрозой гибели человечества в огне ядерной катастрофы. Все вместе это вызывает настоятельную необходимость пересмотра «технократической парадигмы», сущность которой проявляется в своеобразном мировоззрении, существенными чертами которого является примат средств над целью, цели над смыслом и общечеловеческими интересами, смысла над бытием и реальностями современного мира, техники над человеком и его ценностями. Повидимому, единственной альтернативой технократическом вызову может стать гуманистическая ориентация, объявляющая человека высшей ценностью на земле и решающая проблемы человек и мир, человек и природа, человек и общество, человек и человек на основе общечеловеческих ценностей. Вместо подобного подхода к решению проблемы гуманизации образования постепенно гуманизацию стали подменать призывами к гуманитаризации, понимаемой как усиление гуманитарной составляющей образования в ущерб естественно-математическому, призывали к пересмотру учебных планов, нарушающему сложившийся в течение ста лет баланса, равновесия в распределение учебного времени между гуманитарным и естественно-математическим циклами дисциплин. Некоторые руководители народного образования пошли еще дальше: резко сократили число часов естествознания и математики или вовсе исключили эти предметы. И этот процесс уже приносит печальные плоды: резко снижается уровень и качество естественного и математического образования, чем многие десятилетия славилась российская общеобразовательная школа. При этом не наблюдается положительных сдвигов в гуманизации, очеловечивании образования, ориентации его на личность, ее духовные потребности, интерес, склоности, способности, жизненные планы, связанные с продолжением образования. Хорошо известно, и примеров тому не мало, что обучение гуманитарным предметам, например, литературе или истории, можно обесчеловечить, а обучение естественным предметами или математике гуманизировать. Таким образом, гуманитаризация образования не может служить ни единственным, ни доминирующим средством его гуманизации. Так, усилия, предпринимаемые многими учеными и педагогами, направленные на охранение непрерывности и весомости математического образования, как элемента общей културы современного человека, недопущения падения его уровня и качества в общеобразовательной школе – есть своебразное отстаивание в новых совреемнных условиях идей Ф. Клейна о равноправии гуманитарного и естественно-математического образования.

2. Несомненный интерес и актуальность представляют мысли Ф. Клейна относительно общих педагогических подходов к организации и методам математического образования. Особенно следует отметить приверженность Ф. Клейна принципу природообразности при обучении математике, генетическому развитию основных ее идей и методов, изучаемых в школе. С особой силой он подчеркивает необходимость следования этому принципу в финале своих лекций учителям, изложенных в книгах [4]. Приведем полный текст заключительной страницы этих лекций:

> «Я хотел бы точнее выразить мое отношение к этому вопросу, а именно, сослаться на тот биогенетический основной закон, по которому индивид своем развитии пробегать в сокращенном виде все стадии развития вида, эти идеи стали в настоящее время общим достоянием образованного человека. Этому основному закону, я полагаю, должно было бы следовать – по крайней мере в общих чертах – и преподавание математики, как и вообще всякое преподавание. Мы должны приспособлятся к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключение ознакомить их с абстрактными идеями; преподавание должно идти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная со своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания! Необходимо всегда повторять это требование, так как всегда находятся люди, которые по примеру средневековых схоластов начинают свое преподавание с самых общих идей и защищают этот метод как якобы единственно научный. А между тем это основание неправильно: научно обучать значит учить человека научно думать, а не оглушать его с самого начала холодной, научно наряженной систематикой. Существенное препятствие к распростанению такого естественного и поистине научного метода обучения представляет собой, несомненно, недостаток в знакомстве с ис-

торией математики. Чтобы с этим бороться, я особенно охотно вплетал в мое изложение многочисленные исторические моменты. Пусть это покажет вам, как медленно возникали все математические идеи, как они почти всегда всплывали сперва скорее в виде догадки и лишь после долгого развития приобретали неподвижную выкристаллизованую форму систематического изложения. Пусть это знание – этим пожеланием я хотел бы закончить мои лекции – окажет продолжительное влияние на характер вашего собственного преподавания в школе.»

На печальных уроках современных «реформаторов» математического образования нетрудно проследить к чему приводит нарушение этого пронципа. Достаточно внимательно посмотреть на опыт ранней аксиоматизации школьного курса геометрии или вспомнить «архитектурные» излишества при использовании элементов теории множеств в школе.

В связи с принципом природосообразности остановимся еще на одном из требований, выдвигаемых в качестве основных реформаторами математического образования, в том числе и Ф. Клейном. Речь идет о соблюдении принципа наглядности преподавания математики. Ф. Клейн хорошо понимал, как трудно выдержать в чистоте этот принцип, как легко его утрировать. Поэтому он в своих выступлениях неоднократно подробно излагал, что, собственно, он понимает под принципом наглядности, как, по его мнению, следует реализовать его в преподавании арифметики, алгебры, анализа, геометрии. В связи с этим следует отметить такие рекомендации Ф. Клейна на первых ступенях обучения следует отказаться от строго логических тенденций; необходимо привлекать возможно больше наглядных представлений, примеров из повседневной жизни; особенно важно использовать графическое изображение алгебраической функций; учащиеся должны самостоятельно систематически на клечатой бумаге вычерчивать графики функций, в том числе термометрические, барометрические, статистические кривые, графики железнодорожного движения и т.п.; при всем том необходимо, чтобы в течение последних лет обучения в школе логическая сторона дела по возможности была достаточно выясненной; при том, как писал Клейн, « ... нужно решительно избегать выдавать за доказательства такого рода соображения, которые решительно не представляют собой таковόго».

О роли наглядности на разных ступенях обучения математике в школе написано немало научно-педагогических работ. К этой проблеме постояно приходится возвращаться в связи с появлением новых средств и методов обучения, разработкой новых образовательных технологий, особенно информационных и коммуникационных. Несмотря на наличие многочисленных исследований в этой области, роль и место наглядности в преподавании математики, развитие математической интуиции, формирование пространственных представлений и развитие пространственого воображения, сочетание индуктивных и дедуктивных методов обучения, пути и методы приобщения школьников к аксиоматическому методу – все эти проблемы остаются актуальными в современной дидактике математики. В связи с этими идеями полезно заново продумать роль и место курсов наглядной или наглядно-практической геометрии в школе, методику развития у учащихся конструктивно-геометрических умений и навыков.

3. Ф. Клейн был сторонником более широкого, чем это было принято в его время, общематематического образования. Он считал необходимым в преподавании уделать внимание раскрытию логических основ курсов, исторических связей, идей, фактов, методов. Так, он считал для себя необходимым и рекомендовал это другим, в том числе будущим учителям: « ... гораздо в большей степени, чем это обыкновенно делается, указывать на историческое развитие науки, на достижения ее великих основоположников. Такого рода разъяснениями я надеюсь содействовать, я бы сказал, вашему общему математическому образованию: наряду со знанием деталей, которые вы черпаете из специальных курсов, должно занять свое место в понимании логических и исторических связей целого». Так писал Ф. Клейн в введении к [4].

Следует подчеркнуть, что проблема реализации культоро-логического аспекта математического образования сейчас не менее актуальна. Приобщение обучаемых к общественной культуре через изучение математики, ее строения, эстетики, истории развития – одна из важных современных задач педагогики и методики математики.

4. Одно из ведущих направлений реформы математического образования, проводимой под руководством Ф. Клейна, состояло в тесном сближении математической теории с ее приложениями и применением в практике. Это направление реформы было активно поддержано всеми ее сторонниками. Вместе с другими руководителями реформаторского движения в Германии, физиком Рикке (E. Ricke) Ф. Клейн провел в этом отношении широкую пропаганду. Наиболее яркое выражение она получила в сочинении «О прикладной математике и физике», составленном обоими авторами [9]. (Здесь понятие “Hohere Schule” соответствует нашему «средняя школа» в отличие от немецкого понятия “Hochschule”, соответствующего «высшей школе».) Известно, что на это направление усовершенствования математического образования постояно обращали внимание последующие поколения реформаторов. Оно остается актуальным и по сей день.

5. Основная ведущая идея реформаторов математического образования, возглавляемых Ф. Клейном, состояла в том, чтобы обновить, осовременить общеобразовательный курс математики, включить в него новые идеи и достижения математической науки восемнадцатого, девятнадцатого столетий, несомненно, наложившие глубокой отпечаток на все отрасли знаний и техники, на господствующие философские воззрения, по выражению Ф. Клейна «на весь строй нашей культуры». Для реализации этой идеи Ф. Клейном был предложено в основу общеобразовательного курса математики положить понятие функции, так как изучение функций составляет предмет всей высшей математики, а изучение функциональной зависимости различного рода факторов – ведущая задача прикладной математики. Именно с этого и началась истинная реформа математического образования. Понятие о функции, классические методы исследования функций (основы теории пределов, начала дифференциального и интегрального исчисления), изучение свойств плана элементарных функций – вот пут реализации идеи реформаторов. При этом имелось в виду, что идея функциональной зависимости величин станет ведущей как в алгебре, так и в геометрии, пронизывая весь путь математики средней школы. От приверженцев этой реформы вошел в обиход часто и сейчас используемый термин «функциональное мышление». Развить у учащихся способность к функциональному мышлению – вот основная задача реформы математического образования, предпринятой Ф. Клейном и его коллегами.

Если вдуматься в те преобразования, которые произошли в российском математическом образовании в двадцатом веке, то многое из того, что задумал Ф. Клейн, реализовано. Нам трудно сейчас представить школьные курсы математики, алгебры, анализа, без понятия функции, без изучения свойств степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических функций, без понятия предела, элементов дифференциального и интегрального исчислений, без их приложений к задачам геометрии и физики. Но, к сожалению, многие идеи Ф. Клейна до сих пор не реализованы, хотя и предпринимались неоднократные попытки. Это, в основном, относится к школьному курсу геометрии. Вдумаемся в основню идею «Эрлангенской программы» – классификацию геометрий с групповой точки зрения. Из нее четко следует, что основной предмет геометрии современной средней школы должен состоять в изучении инвариантов двух групп геометрических преобразований – группы движений и группы подобий для двумерного случая (плоскости) и трехмерного (пространства). Это означает, что основным объектом изучения в школьном курсе геометрии должно стать геометрическое преобразование – анналы понятия функции и школьный курс геометрии должны быть построены на основе геометрических преобразований. Это и означало бы перестроить его на функциональной основе, это бы и обеспечивало развитие способности к функциональному мышлению средствами геометрии. При этом мы подчеркиваем, что речь идет об идейной основе курса, но не отрицаем возможности изучения признаков равенства треугольников, геометрических построений, координатного метода и других традиционых тем. Однако, если можно так сказать, идеология изучения свойств геометрических фигур должна исходить из группового подхода Ф. Клейна, сущность которого состоит в следующем: каждая фигура определяет некоторую группу движений; эта групп содержит все те движения, которые отображают фигуру на себя, и называется группой самосовмещений (или группой симметрий) данной фигуры; знание группы совмещений фигуры позволяет определить ее геометрические свойства. Например: свойства параллелограмма проистекают из того, что его группа самосовмещений содержит, кроме тождественного преобразования, центральную симметрию; группа самосовмещений праямоугольника (или ромба) богаче – она содержит еще две симетрии, тем самым вызваны дополнительные свойства этих фигур по сравнению со свойствами параллелограмма. Аналогичным образом, могут быть вызваны свойства равнобедренного или равностороннего треугольника, равнобедренной трапеции, правильных многоугольников, правильных многогранников, тел вращения. Изучение свойств фигур на основе рассмотрения групп самосовмещений этих фигур и будет реализацией идей «Эрлангенской программы» в школьном курсе геометрии. Именно эти идеи «Эрлангенской программы» еще предстоит реализовать в школьном математическом образовании. Об актуальности этой задачи говорят многие факты. Приведу только один пример, характеризующий недостаточное развитие функционального мышления, проявляющееся даже у учителей математики при решении геометрических задач. Неоднократно, начиная курс лекций учителям по теории геометрических преобразований, я предлагал слушателям задачу: «Два равнобедренных треугольника, основания которых лежат на одной прямой, расположены в одной полуплоскости, определяемой этой прямой. Построить прямую, параллельную основаниям треугольников так, чтобы на ней боковыми сторонами треугольников высекались отрезки равной длины.» Решение этой задачи обычно вызывало трудности пока я не произносил подсказку о возможности применения параллельного переноса. Трудности в решении задач, очевидно, вызваны «нефункциональностью» мышления, когда фигуры в геометрии рассматриваются неподвижными, неизменяемыми, а мысль решающего задачи направлена на поиски цепочек равных треугольников.

Итак, еще предстоит построить школьный курс геометрии на основе геометрических преобразований, чем будет завершено реформирование математического образования, задуманное Ф. Клейном на рубеже указанного столетия, тем самым будет достигнута гармоничность в математическом развитии учащихся, в направлении формирования у них функционального образа мышления.

6. Ф. Клейн был активным сторонником осуществления в преподавании математики возможно более тесных внутрипредметных и межпредметных взаимосвязей.

Так, он не только ратовал за осуществлении фузионизма в изложении в школе курсов планиметрии и стереометрии, но и был сторонником реализации фузионизма в изложении арифметики, алгебры, анализа и геометрии. Но, если фузионизм в геометрических курсах он считал необходимым довести до создания единого курса геометрии, в котором бы свойства фигур двумерного и трехмерного пространств изучались одновременно в органической взаимосвязи, то фузионизм между курсом алгебры и анализа, с одной стороны, и геометрией – с другой он считал возможным ограничить лишь тесными межпредметными связями. Приведем высказывания самого Ф. Клейна, содержащиеся во введении ко второму геометрическому тому работы [3]:

> « ... я выступаю ... поборником той тенденции, которую я охотнее всего обозначаю слово фузионизм в преподавании арифметики и геометрии. Понимаю при этом «арифметику» как область, к которой принадлежат не только учение о целых числах, но и вся алгебра и анализ. Другие, особенно в Италии, пользуются словом фузионизм для характеристики стремлений, ограничивающихся одною только геометрией. Дело в том, что с давних пор принято как в школе, так и в университете сперва излагать геометрию плоскости, а затем уже совершенно отдельно геометрию пространства (такая практика обучения сохранилась до сих пор у нас в России – Г.Д.), но при этом, к сожалению, геометрию пространства часто слишком урезают, и благородная способность к пространственной интуиции, с которой учащиеся приходят в школу, утрачивается. В противоположность этому «фузионисты» хотят с самого начала одновременно трактовать плоскость и пространство рядом друг с дру-

гом, чтобы не начинать с искусственного ограничения нашего мышления двумя измерениями. Я присоединяюсь здесь и к этим стремлениям, но в то же время имею в виду, как сказано выше, еще далее идущий фузионизм: в прошлом семестре я постоянно оживлял абстрактные теории арифметики, алгебры, анализа чертежами и графическими методами, которые делают для иного излагаемые вещи гораздо более доступными и часто впервые позволяют понять, зачем ими занимаются; аналогично, я буду теперь с самого начала сопровождать пространственную интуицию, которая, конечно, должна занимать первое место, аналитическими формулами, которые в высшей степени облегчают точную формулировку геометрических фактов.»

В течение столетия в России ведутся дискуссии на тему о необходимости и возможности фузионического курса геометрии в школе. Были и многочисленные исследованния на эту тему, были и попытки создания подобных курсов. Однако до сих пор в массовой школе отдельно и изолированно изучается планиметрия и стереометрия, что не способствует развитию пространственного мышления учащихся.

Итак, воспользовавшись 125-летним юбилеем «Эрлангенской программы» Ф. Клейна, мы вкратце рассмотрели некоторые из его педагогических идей, во многом вытекающих из названной программы. Этот обзор, несомненно, свидетельствует об огромном неоценимом вкладе Ф. Клейна в развитие математического образования в мире, преобразивщем содержание и методы обучения математике в школе и вузе, учебную математическую литературу. Вместе с тем, богатый источник математико-методических идей, содержащихся в работах Ф. Клейна далеко не исчерпан. Многие из них еще ждут своего развития и воплощения в школьную практику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Клейн, *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа)*, – В сб.: *Об основаниях геометрии*, Под ред. А. П. Нордена, Гостехиздат, Москва, 1956.
2. Ф. Клейн, *О так называемой неевклидовой геометрии// Об основаниях геометрии*, Москва 1956.
3. Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1937.
4. Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 1 и 2*, издание 4-е, «Наука», Москва 1987.
5. Ф. Клейн, *Неевклидова геометрия*, Москва-Ленинград 1935.
6. В. П. Визгин, *К истории «Эрлангенской программы» Ф. Клейна*, Историко-математические исследования XVIII, Наука, Москва 1973.
7. В. Ф. Каган, *Основания геометрии, т. II*, Москва 1956.
8. Э. Картан, *Теория групп и геометрия*, – В сб.: *Об основаниях геометрии*, Под ред. А. П. Нордена, Гостехиздат, Москва, 1956.
9. F. Klein, E. Ricke, *Neber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht in den hoheren Schulen*, Leipzig, 1900.

Grigoriĭ Davidovich Gleizer,
Russian Academy of Education, Moscow, Russia