THE TEACHING OF MATHEMATICS
2021, Vol. XXIV, 1, pp. 36–53

МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ЦЕНТРА И РАДИУСА СФЕРЫ, ОПИСАННОЙ ОКОЛО ПИРАМИДЫ

Асланбек Х. Назиев

A method of finding the center and radius of the circumsphere for a pyramid. Abstract. The article proposes a method for finding the center and radius of the sphere circumscribed about a pyramid. The method is based on reducing the problem to finding the circumcenter and circumradius for a specially constructed triangle. The construction of this triangle is the same for all inscribed pyramids. For the calculation of radius minimal information about the pyramid is used—its height, the circumradius of its base and the distance from the circumcenter of the base to pyramid's height.

MathEduc Subject Classification: D54, D44

AMS Subject Classification: 97D50, 97G40

Key words and phrases: Stereometry; problem solving; polyhedra; round figures; combination of figures.

1. Введение и предварительные сведения

Как известно, сферой, описанной около пирамиды, называют сферу, которая проходит через все вершины пирамиды. Не для всякой пирамиды существует такая сфера. Если же она существует, то говорят также, что около пирамиды *можно описать сферу.* Хорошо известна следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность. В частности, около каждой правильной и около каждой треугольной пирамиды можно описать сферу.*

Рассмотрим вопрос о *положении* центра описанной сферы. Теоретически этот вопрос решается очень просто. Искомым центром является точка, одинаково удалённая от всех вершин пирамиды. Известно, что все точки, одинаково удалённые от двух данных точек в пространстве, образуют плоскость, перпендикулярную отрезку, соединяющему данные точки, и проходящую через его середину. Это тотчас же приводит к следующему предложению.

Теорема 1.2. *Центр сферы, описанной около пирамиды, является общей точкой всех плоскостей, перпендикулярных рёбрам пирамиды и проходящих через их середины.*

Однако пользоваться этим предложением не очень удобно. Это побуждает искать другие подходы. Чаще всего рассматривают пирамиды, у которых все боковые рёбра или все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Хорошо известны следующие теоремы.

Теорема 1.3. *Для любой пирамиды следующие условия равносильны:*

1° *в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около этого многоугольника;*

2° *все боковые рёбра пирамиды имеют одну и ту же длину;*

3° *все боковые рёбра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания.*

Если выполняется какое-нибудь из перечисленных условий, то радиус R сферы, описанной около пирамиды, находится по формуле $R = l^2/(2H)$, где l – длина бокового ребра пирамиды, H – её высота (см. пример 3.3).

Теорема 1.4. *Для любой пирамиды следующие условия равносильны:*

1° *в основание пирамиды может быть вписана окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности;*

2° *все высоты боковых граней пирамиды, проведённые из вершины пирамиды, имеют одну и ту же длину;*

3° *все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания.*

Для каждой пирамиды, удовлетворяющей одному из перечисленных условий, существует вписанная в неё сфера. Если, к тому же, пирамида треугольная, то для неё существует описанная сфера, и растояние δ от центра окужности, описанной около основания пирамиды, до высоты пирамиды равно расстоянию между центрами окружностей, вписанной в основание и описанной около него, и может быть вычислено по формуле Эйлера $\delta = \sqrt{\rho(\rho - 2r)}$, где ρ и r – радиусы описанной и вписанной окружностей.

2. Описание метода

Мы предлагаем общий метод, не связанный с какими-либо дополнительными ограничениями, налагаемыми на количество сторон основания, углы между боковыми гранями (или боковыми рёбрами) и плоскостью основания и т. п. Он основан на теореме о сечении шара плоскостью. Напомним [1, п. 59], что имеет место

Теорема 2.1. *Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.*

Рассмотрим пирамиду с описанной около неё сферой. Обратим внимание на плоскость основания пирамиды. Сечением сферы этой плоскостью является окружность, описанная около основания пирамиды. Согласно теореме 2.1 центр этой окружности лежит на прямой, перпендикулярной плоскости сечения и проходящей через центр шара. То же самое можно сказать иначе: центр шара лежит на прямой, перпендикулярной к секущей плоскости и проходящей через центр сечения.

Дла сокращения дальнейших формулировок условимся называть прямую, проходящую через центр окружности, описанной около основания пирамиды, и перпендикулярную плоскости основания, *центральним перпендикуляром основания пирамиды*. Тогда сформулированное только что предложение примет следующий вид:

Теорема 2.2. *Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на центральном перпендикуляре основания пирамиды.*

В дальнейшем именно этот вариант теоремы 2.1 мы будем называть теоремой о сечении шара плоскостью.

Для окончательного определения положения центра описанной сферы на этом перпендикуляре и радиуса этой сферы мы предлагаем использовать простой и надёжный *метод сведения к окружности*, основанный на следуюших соображениях.

Рассмотрим плоскость, проходящую через центральный перпендикуляр основания и высоту пирамиды. Эта плоскость пересекает сферу по большой окружности, а круг, описанный около основания – по диаметру этого круга. Соединим вершины пирамиды с концами указаного диаметра. Получим треугольник, вписанный в большую окружность сферы. Центр этой окружности совпадает с центром описанной сферы, а радиус окружности – с радиусом сферы. Таким образом:

Теорема 2.3 (Основа метода). *Центр и радиус сферы, описанной около пирамиды, совпадают с центром и радиусом окужности, описанной около треугольника, вершинами которого являются вершина пирамиды и концы того диаметра окружности, описанной около основания пирамиды, которому принадлежит основание высоты пирамиды.*

3. Примеры

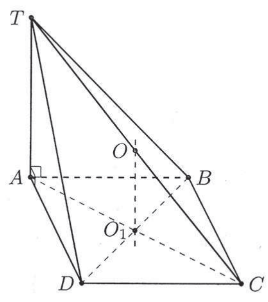

Рис. 1

Продемонстрируем достоинства описанного метода на ряде примеров. Начнём с совершенно простого примера.

Пример 3.1. Пусть в пирамиде $TABCD$ основанием является прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, и пусть ребро TA перпеникулярно плоскости основания и имеет длину c. Найдём радиус R описанной сферы пирамиды.

Для этого заметим, что, поскольку ребро TA перпендикулярно плоскости основания, оно параллельно центральному перпендикуляру основания. А поскольку в основании пирамиды лежит прямоугольник, центром основания является точка O_1 пересечения диагоналей. Значит, центральный перпендикуляр основания лежит в плоскости треугольника TAC. Поэтому указанная плоскость пересекает описанную сферу по большой окружности, то есть по окружности, центр и радиус которой совпадают с центром и радиусом сферы. А треугольник TAC вписан в эту окружность. Поскольку этот треугольник прямоугольный, середина O его гипотенузы является центром описанной около него окружности, а половина гипотенузы – её радиусом. Итак, центр и радиус сферы, описанной около данной пирамиды, совпадают с центром и радиусом окружности, описанной около треугольника TAC.

Рассматривая треугольники ADC и TAC, тотчас же получим, что

$$TC^2 = TA^2 + AC^2 = TA^2 + AD^2 + DC^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

откуда $R = \dfrac{1}{2}TC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Рассмотрим пример «наклонной» пирамиды.

Пример 3.2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10 cm, 10 cm и $10\sqrt{3}$ cm. Высота пирамиды имеет длину 10 cm и проходит через ортоцентр треугольника. Найти радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

Замечание 3.1. Тетраэдр, у которого все высоты пересекаются в одной точке, называют ортоцентрическим (см. [3]). У такого тетраэдра каждая высота проходит через ортоцентр грани, к которой она проведена. Для вычисления радиуса сферы, описанной около тетраэдра, достаточно одной такой высоты.

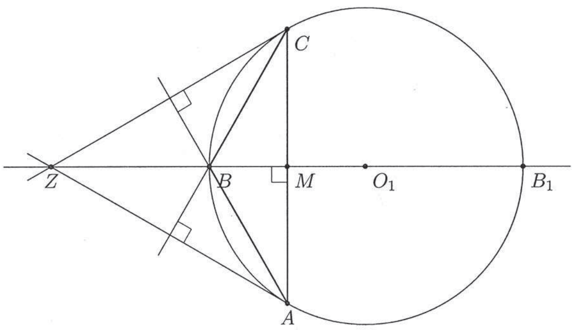

Рис. 2. Треугольник, его ортоцентр и описанная окружность

Решение. Пусть вершиной пирамиды является точка T, а в основании лежит треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$ cm, $AC = 10\sqrt{3}$ cm. Используя теорему косинусов, находим что $\measuredangle ABC = 120°$. Значит, ортоцентр Z треугольника находится за пределами треугольника на продолжении биссектрисы угла B за точку B, так что мы имеем дело с «наклонной» пирамидой.

Рассмотрим плоскость β основания пирамиды. Эта плоскость пересекает описанную сферу по окружности, описанной около треугольника ABC. Угол BAC является вписанным в эту окружность и имеет меру в 30°. Значит, он опирается на сторону, равную радиусу окружности, в силу чего получаем, что $\rho = 10$ cm.

Продолжим стороны AB и CB за точку B, опустим на продолжения перпендикуляры CA_1 и AC_1 и продолжим их до пересечения. Получим ортоцентр Z данного треугольника. Несложные вычисления показывают, что $ZB = 10\,\mathrm{cm}$.

Проведём плоскость γ через высоту TZ пирамиды и центральный перпендикуляр l основания. В силу теормы о сечении шара плоскостью, центр O описанной сферы лежит на l. Значит, плоскость γ пересечёт сферу по окружности большого круга, имеющего тот же радиус R, что и сфера. А круг, описанный около основания, плоскость γ пересечёт по диаметру BB_1. Иначе говоря, указанная окружность большого круга окажется описанной около треугольника TBB_1, так что центр и радиус окружности, описанной около треугольника TBB_1, окажутся центром и радиусом сферы, описанной около данной пирамиды. Изобразим описанную конфигурацию.

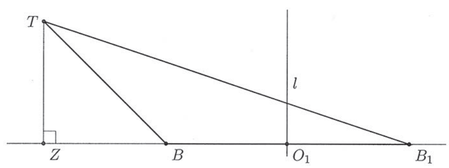

Рис. 3. Вспомогательный треугольник и центральный перпендикуляр основания

На приведённом чертеже: $TZ = ZB = BO_1 = O_1B_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Поэтому

$$TB = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}, \quad TB_1 = 10\sqrt{10}\,\mathrm{cm}, \quad \sin\measuredangle ZB_1T = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

В силу известной формулы для вычисления радиуса описанной окружности,

$$R = \frac{TB}{2\sin\measuredangle ZB_1T} = \frac{10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}} = 10\sqrt{5}\,\mathrm{cm}.$$

Следующая задача легко решается с помощью вспомогательной фигуры вращения.

Пример 3.3. Высота правильной 123-угольнной пирамиды равна H, боковое ребро равно l. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

Решение. Рассмотрим плоскость основания пирамиды. Эта плоскость пересекает описанный шар по кругу, описанному около 123-угольника, лежащего в основании пирамиды. Рассмотрим конус, основанием которого является этот круг, а вершиной – вершина T пирамиды. По самому определению этого конуса сфера, описанная около данной пирамиды, описана и около этого конуса, а высота и образующая конуса соответственно равны высоте H и боковому ребру l пирамиды. Таким образом, нужно найти радиус сферы, описанной около конуса с образующей l и высотой H. Обозначим через O_1 и r центр и радиус основания конуса, а через O и R – центр и искомый радиус описанной сферы.

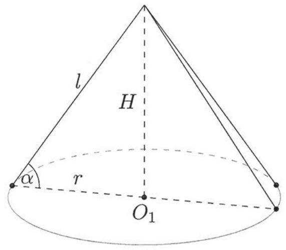

Рис. 4. Конус с осевым сечением

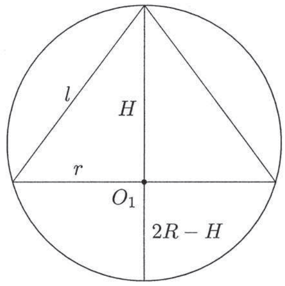

Рис. 5. Сечение конуса и описанной сферы

В силу теоремы 2.2 центр сферы лежит на оси конуса. Проведём плоскость через ось конуса и рассмотрим полученное сечение указанной комбинации сферы и конуса. Поскольку центр сферы лежит на оси конуса, сечением сферы является окружность радиуса R. Сечением же конуса – равнобедренный треугольник высоты H с боковой стороной l. Поскольку конус вписан в сферу, этот треугольник вписан в полученную окружность.

Используя теорему о произведениях отрезков пересекающихся хорд, получим $H(2R-H)=r^2$. При этом $r^2=l^2-H^2$. Значит

$$H(2R-H)=l^2-H^2, \quad \text{откуда} \quad R=\frac{l^2}{2H}.$$

Метод, использованный при решении предыдущей задачи, можно назвать *методом промежуточной фигуры вращения*. Этим методом решается большой массив задач, в частности, все задачи на комбинации многогранников и фигур вращения из учебника [1]. Далее рассмотрим примеры задач, не решаемых подобным образом. Они различаются тем, имеется или нет в пирамиде боковое ребро, лежащее в одной плоскости с центральным перпендикуляром основания.

Сначала приведём примеры задач на пирамиды, у которых такое ребро имеется. Начнём с отоносительно простой задачи (которая не так давно считалась довольно трудной).

Пример 3.4. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро BC равно a, $AB=AC$, ребро SA перпендикулярно к основанию ABC пирамиды, двугранный угол при ребре SA равен 2α, а при ребре BC равен β. Найти радиус описанного шара.

Приведём сначала решение этой задачи, содержщееся в [2, с. 485–488].

Первое решение. Начало цитаты. Поскольку ребро SA перпендикулярно плоскости основания, то

$$\measuredangle BAS=\measuredangle CAS=90^\circ,$$

а потому угол BAC как раз и является линейным углом двугранного угла при ребре SA. Таким образом, в основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине, а высота пирамиды совпадает с ребром SA.

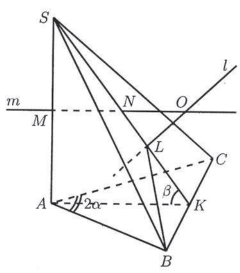

Рис. 6

Так как проекции боковых рёбер SB и SC на плоскость основания равны, то и сами эти рёбра равны. Поэтому грань BSC – равнобедренный треугольник, и его высота, опущенная из вершины S, попадает в середину K ребра BC. По теореме о трёх перпендикулярах AK – высота треугольника BAC. Отсюда ясно, что угол SKA – линейный угол двугранного угла при ребре BC, т.е. $\measuredangle SKA = \beta$.

Центр описанного шара лежит на пересечении прямой l, перпендикулярной плоскости BSC и проходящей через центр окружности, описаной около треугольника BSC, с плоскостью, проходящей через середину ребра AS перпендикулярно к нему. Прямая l лежит в плоскости ASK: в самом деле, плоскость BSC проходит через прямую BC, перпендикулярную к плоскости ASK, т.е. плоскости BCS и ASK перпендикулярны; в то же время прямая l перпендикулярна к плоскости BSC и проходит через линию пересечения этих плоскостей, так что она лежит в плоскости ASK.

Итак, центр шара лежит в плоскости ASK. Вынесем эту плоскость на специальный чертёж. Центр шара O будет тогда лежать на пересечении прямой l и прямой m, перпендикулярной к AS и проходящей через его середину. Но, вообще говоря, могут представиться три возможности: прямые l и m пересекаются внутри или вне треугольника ASK или на его стороне, и нам придётся рассмотреть все эти возможности (рис 7, 8, 9). Ниже, в ходе выкладок, мы покажем, что две из них на самом деле не осуществляются.

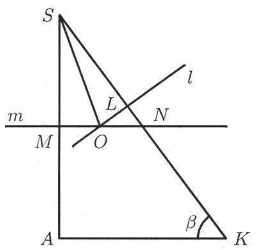

Рис. 7

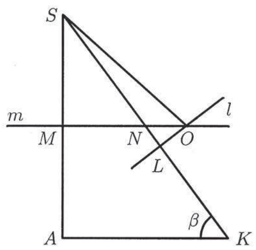

Рис. 8

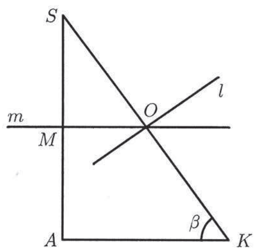

Рис. 9

Нас интересует радиус R описанного шара, т.е. расстояние от точки O – точки пересечения перпендикуляров m и l к сторонам угла KSA – до точки S, вершины этого угла.

Прежде всего отыщем SL – проекцию искомого расстояния на сторону SK треугольника KAS. Так как в треугольнике AKB (рис. 6) нам известен катет $BK = \frac{1}{2}a$ и $\measuredangle KAB = \alpha$, то $AK = \frac{1}{2}a \operatorname{ctg} \alpha$. Далее, из треугольника KAS имеем $SK = \dfrac{a \operatorname{ctg} \alpha}{2 \cos \beta}$. Так как L – центр описанной около треугольника BSC окружности, то $LS = LB$, а потому из треугольника BKL находим, что $(SK - SL)^2 + KB^2 = SL^2$, откуда

$$SL = \frac{a(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta}.$$

Отметив, что проведённые вычисления отрезка SL никак не зависели от местоположения центра O описанного шара, вернёмся к рис. 7, 8, 9. Обозначим через N точку пересечения прямой m со стороной SK. Ясно, что прямые l и m пересекаются *вне* треугольника KAS, если $SN < SL$ (рис. 8); если же $SN > SL$, то точка O лежит внутри этого треугольника (рис. 7); наконец, если $SN = SL$, то точка O лежит на стороне SK этого треугольника (рис. 9). Выясним, какое из этих положений имеет место на самом деле.

Так как MN – средняя линия треугольника KAS, то $SN = \frac{1}{2}SK$. Сравнивая длины отрезков SN и SL, без труда докажем, что при любых a, α и β

$$\frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{4 \cos \beta} < \frac{a(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos \beta)}{4 \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta}$$

(из геометрических соображений следует, что $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и $0 < \beta < 90^\circ$). Следовательно, каковы бы ни были размеры a, α и β пирамиды $SABC$, центр O описанного шара всегда лежит вне пирамиды. Это, в свою очередь, означает, что вынесенная нами плоская конфигурация в плоскости KAS может иметь лишь вид, указанный на рис. 8; расположения, изображённые на рис. 7 и 9, в действительности иметь места не могут.

Рассматривая рис. 8, легко покажем, что $\measuredangle ONL = \beta$, а потому

$$LO = NL \operatorname{tg} \beta = (SL - SN) \operatorname{tg} \beta.$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для SL и SN, получаем после очевидных вычислений $LO = \frac{1}{4} a \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$. Наконец, из прямоугольного треугольника OLS находим

$$R = \sqrt{LO^2 + SL^2} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^4 \alpha}.$$

(*Конец цитаты.*)

Теперь приведём решение рассмотренной только что задачи предлагаемым методом (сведения к окружности). При таком подходе к делу задача оказывается и не трудной, и не сложной.

Второе решение. Первые два абзаца – ты же, что и в приведённом выше решении, только чертёж другой, без ненужных здесь деталей (рис. 10).

Из прямоугольных треугольников SAK и CAK находим:

$$SA = AK \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} BC \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Применяя к треугольнику ABC теорему синусов, находим диаметр d описанной около него окружности:

$$d = 2r = \frac{BC}{\sin \measuredangle BAC} = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

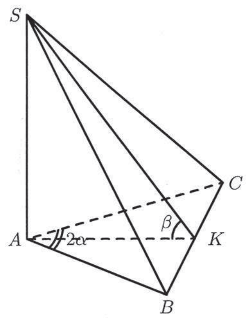

Рис. 10

Рассмотрим тот из диаметров этой окружности, одним концом которого является вершина A, другой конец обозначим через A'. По теореме 2.2 центр шара, описанного около пирамиды, лежит на прямой, проходящей через середину отрезка AA' и перпендикулярной плоскости треугольника ABC. Этой плоскости по условию задачи перпендикулярно и ребро SA (также проходящее через точку A). Значит, центр O описанного шара лежит в плоскости SAA'. Поскольку точки S, A, A' лежат на описанной сфере, они удалены от точки O на расстояние, равное радиусу R этой сферы. А поскольку все четыре точки S, A, A' и O лежат в одной плоскости, O и R являются, сооответсвенно, центром и радиусом окружности, описанной около треугольника SAA'. Треугольник же этот – прямоугольный. Значит, O – середина гипотенузы AA' этого треугольника, а R равен половине её длины. Таким образом,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AA'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{4}a^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta} \\ &= \frac{a}{2\sin 2\alpha}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta \cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= \frac{a}{2\sin 2\alpha}\sqrt{1 + \cos^4\alpha \operatorname{tg}^2\beta}. \end{aligned}$$

(Это очевидным образом равно тому, что было получено в предыдущем решении.)

Пример 3.5. Пусть в пирамиде $TABC$, $BC = 2a$, $TA = 2b$, $TB = TC = AB = AC = c$ (рис. 11). Найдём радиус R сферы, описанной около этой пирамиды.

Замечание 3.2. Опираясь на приведённый далее рис. 13, читатель легко докажет, что такая пирамида существует тогда и только тогда, когда $c^2 > a^2 + b^2$.

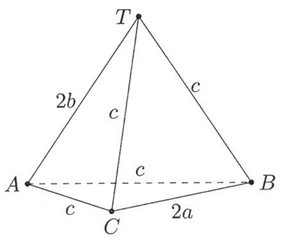

Рис. 11. Пирамида

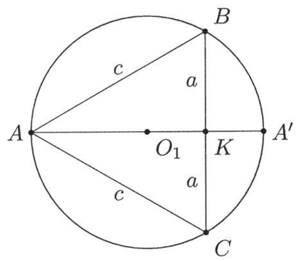

Рис. 12. Основание пирамиды и описанная окружность

Начинаем стандартно (в русле того подхода, который мы предлагаем): центр O сферы, описанной около пирамиды, располагается на центральном перпендикуляре основания пирамиды, то есть, на прямой, перпедикулярной плоскости основания и проходящей через центр O_1 описаной около основания окружности. Точка O_1 (рис. 12) лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC (в плоскости основания). А поскольку $AB = AC$, этот серединный перпендикуляр проходит через вершину A. Таким образом, точка O_1 лежит на луче AK, где K – середина стороны BC. При этом точка A лежит на окружности. Значит, луч AK

пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке, скажем, A', отстоящей от точки A на расстоянние, равное диаметру d этой окружности.

Диаметр d $(= AA')$ легко находится по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд:

$$KB \cdot KC = AK \cdot KA', \qquad \text{то есть}$$
$$a^2 = \sqrt{c^2 - a^2} \cdot (d - \sqrt{c^2 - a^2}), \qquad \text{откуда}$$
$$d = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Проведём (мысленно) высоту TQ пирамиды. Поскольку рёбра TB и TC равны, равны и их проекции QB и QC на плоскость основания. Значит, точка Q равноудалена от точек B и C и потому лежит на прямой AK.

Итак, плоскость, проходящая через центральный перпендикуляр основания и высоту пирамиды, проходит также через прямую AK и ребро TA. Стало быть, в этой плоскости лежат точки T, A и A', принадлежащие описанной сфере. А ещё в ней лежит центр этой сферы. Значит, рассмотренная плоскость пересекает сферу по окружности с радиусом, равным радиусу R описанной сферы. Это означает, что искомый радиус описанной сферы равен радиусу окружности, описаной около треугольника TAA'. Осталось найти этот радиус.

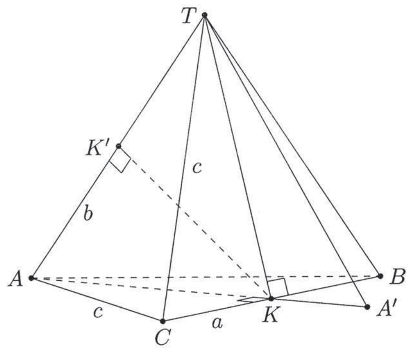

Рис. 13. Пирамида и диаметр окружности, описанной около основания

Рассмотрим треугольник TAA' (рис. 13). Середина K отрезка BC лежит на отрезке AA' и удалена от точек T и A на одно и то же расстояние $TK = AK = \sqrt{c^2 - a^2}$. Значит, треугольник AKT – равнобедреный с вершиной K. Пусть K' – середина ребра TA. Тогда KK' есть и медиана, и высота треугольника AKT. В силу этого $AK' = b$ и угол $AK'K$ – прямой. Значит

$$\cos\angle TAA' = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \qquad \sin\angle TAA' = \frac{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

В силу теоремы косинусов,

$$(TA')^2 = (2b)^2 + \left(\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right)^2 - 2 \cdot 2b \cdot \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \cos\angle TAA'$$

$$= 4b^2 + \frac{c^4}{c^2-a^2} - 4b\cdot\frac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{c^2-a^2}}$$
$$= 4b^2 + \frac{c^4}{c^2-a^2} - \frac{4b^2c^2}{c^2-a^2} = \frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2},$$

так что $TA' = \sqrt{\dfrac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2}}$. Отсюда, в силу теоремы синусов,

$$R = \frac{TA'}{2\sin\measuredangle TAA'} = \sqrt{\frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2}} : 2\frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2-b^2}}.$$

В каждой из рассмотренных до этого пирамид имелось боковое ребро, лежащее в одной плоскости с центральным перпедикуляром основания. Теперь рассмотрим пирамиду, у которой такого ребра нет. В рамках предлагаемого нами подхода разница оказываетсся незначительной.

Пример 3.6. Пусть в пирамиде $TABC$, $AC = 6\,\mathrm{cm}$, $BC = 8\,\mathrm{cm}$, $AB = 10\,\mathrm{cm}$ и двугранные углы при рёбрах AB, BC и CA равны $\mathrm{arctg}\sqrt{5}$ (рис. 14). Найдём радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

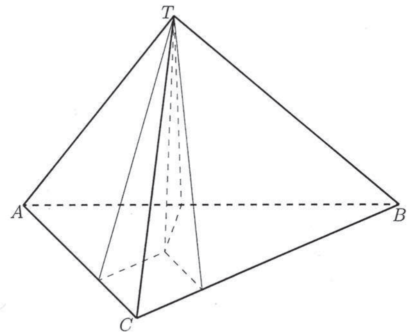

Рис. 14. «Непрямая» пирамида

Используя равенство данных углов, стандартным рассуждением показываем, что основанием высоты пирамиды является центр O_2 вписанной в треугольник ABC окружности. Без труда доказывается, что в треугольнике ABC, $\measuredangle C = 90°$, и находится радиус вписанной в него окружности $r = 2\,\mathrm{cm}$. После этого тотчас же вычислается высота пирамиды $h = r\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$.

В силу теоремы 2.2 центр O сферы, описанной около пирамиды, лежит на прямой l, перпендикулярной плоскости основания и проходящей через центр O_1 окружности, описанной около основания. В данном случае, центром описанной окружности основания является середина гипотенузы, а радиус её $R_1 = 5\,\mathrm{cm}$. Отсюда $O_1O_2 = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ (рис. 15).

Прямые l и TO_2 параллельны (ибо перпендикулярны плоскости основания). Значит, они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость основания пирамиды по прямой O_1O_2. Обозначим через X и Y точки пересечения этой прямой со сферой, описанной около пирамиды. Получим в нашей плоскости треугольник XTY (рис. 16), все вершины которого лежат на сфере. Поскольку центр описанной сферы лежит в рассматриваемой плоскости, сечением сферы этой плоскостью является большая окружность. Стало быть, вершины треугольника XTY лежат на большой окружности описанной сферы, и радиус этой сферы может быть найден как радиус окружности, описанной около треугольника XTY. Решим эту планиметрическую задачу.

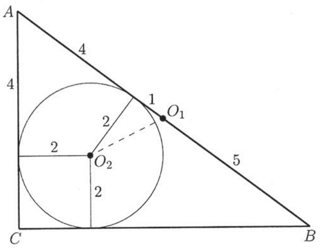

Рис. 15. Основание пирамиды

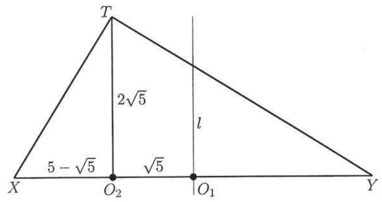

Рис. 16. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды (TO_2) и центральный перпендикуляр основания (l)

Итак, рассмотрим треугольник XTY, у которого $XY = 10\,\text{cm}$, а высота равна $2\sqrt{5}\,\text{cm}$ и проходит через точку O_2 на стороне XY, отстоящую от её середины O_1 на $\sqrt{5}\,\text{cm}$. Найдём радиус R окружности, описанной около этого треугольника. В силу теоремы синусов $R = \dfrac{TY}{2\sin\measuredangle TXY}$. При этом

$$TY = \sqrt{TO_2^2 + O_2Y^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (5+\sqrt{5})^2} = \sqrt{10\cdot(5+\sqrt{5})},$$

$$\sin\measuredangle TXY = \frac{TO_2}{TX} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (5-\sqrt{5})^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10\cdot(5-\sqrt{5})}},$$

так что

$$R = \frac{\sqrt{10\cdot(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{10\cdot(5-\sqrt{5})}}{2\cdot\sqrt{5}} = 10\ (\text{cm}).$$

4. Рассмотрение общего случая

В заключение, чтобы продемонстрировать универсальность предложенного метода, рассмотрим общий случай. Возьмём произвольную пирамиду с описанной около неё сферой. Будем считать, что известны:

- H – высота пирамиды;
- ρ – радиус окружности, описанной около основания пирамиды;
- δ – расстояние между высотой пирамиды и центральным перпендикуляром основания (то есть, расстояние между центром окружности, описанной около основания пирамиды, и основанием высоты пирамиды).

Введём обозначения:

- T – вершина пирамиды;
- T_1 – проекция вершины пирамиды на плоскость основания;
- O_1 – центр окружности, описанной около основания пирамиды.

Проведём плоскость через высоту пирамиды и центральный перпендикуляр основания пирамиды. Обозначим через X и Y точки пересечения этой плоскости с окружностью, описанной около основания. Положим $\alpha = \measuredangle XTY$. На прямой XY введём координаты[1], приняв O_1 за начало отсчёта, а луч O_1Y – за положительную полуось. Обозначим через τ координату точки T_1. Заметим, что координаты точек X, O_1, Y равны, соответственно, $-\rho$, 0, ρ. Допустим, что угол α – острый. Тогда возможны следующие (и только следующие) случаи:

$$\tau < -\rho; \quad \tau = -\rho; \quad -\rho < \tau < 0; \quad \tau = 0; \quad 0 < \tau < \rho; \quad \tau = \rho; \quad \tau > \rho.$$

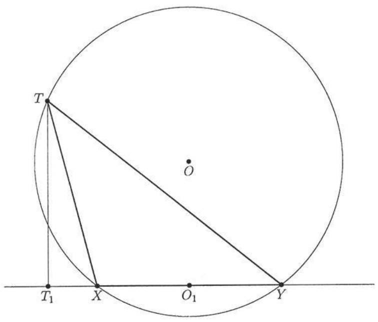

Рис. 17. $\tau < -\rho$

Рассмотрим первый (рис. 17). Пусть $\tau < -\rho$. Тогда X лежит между T_1 и O_1, а O_1 – между X и Y. Значит, $T_1X = T_1O_1 - XO_1 = \delta - \rho$, а $TY = TO_1 + O_1Y = \delta + \rho$. Из прямоугольного треугольника TT_1X находим:

$$TX = \sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2};$$

$$\sin\alpha = \sin\measuredangle TXT_1 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2}},$$

а из треугольника TT_1Y: $TY = \sqrt{H^2 + (\delta + \rho)^2}$. Применяя к треугольнику TXY теорему синусов, находим радиус описанной около него окружности, то есть, R – радиус сферы, описанной около пирамиды:

$$R = \frac{TY}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta + \rho)^2}}{2 \cdot \frac{H}{\sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2}}} = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta + \rho)^2} \cdot \sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2}}{2H}.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи для острого угла $\alpha = \measuredangle XTY$ (рис. 18–23). Случаи прямого и тупого угла α читатель легко разберёт самостоятельно. Незначительные различия в рассмотрении перечисленных случаев не представляют затруднений.

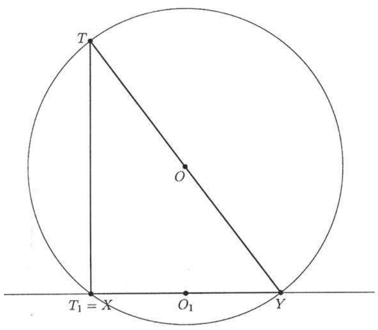

Рис. 18. $\tau = -\rho$

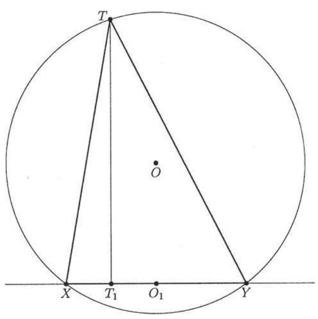

Рис. 19. $-\rho < \tau < 0$

[1]Они вводится только для наглядности перечисления разбираемых далее случаев.

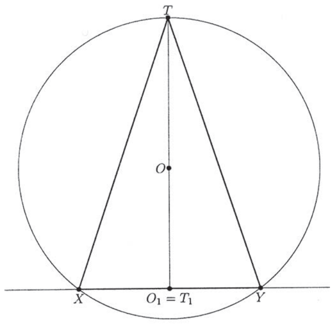

Рис. 20. $\tau = 0$

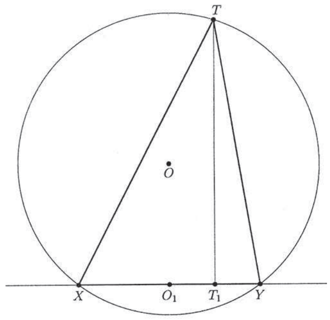

Рис. 21. $0 < \tau < \rho$

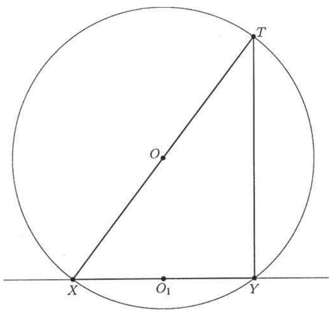

Рис. 22. $\tau = \rho$

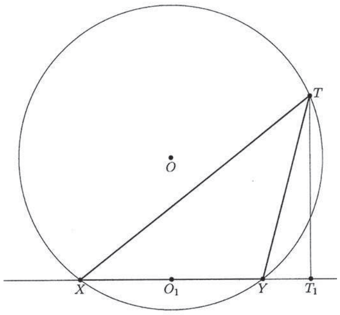

Рис. 23. $\tau > \rho$

Теперь, зная радиус сферы, мы можем указать и положение её центра, который, как мы знаем, располагается на центральном перпендикуляре основания. А расстояние Δ от него до плоскости основания легко находится с помощью теоремы Пифагора и равно $\sqrt{R^2 - \rho^2}$. После громоздких, но не трудных выкладок получается, что

$$\Delta = \frac{H^2 + \delta^2 - \rho^2}{2H}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1 (Основной результат статьи). *Рассмотрим произвольную пирамиду с описанной около неё сферой. Пусть H – высота пирамиды, ρ – радиус окружности, описанной около основания пирамиды, δ – расстояние между высотой пирамиды и центральным перпендикуляром основания. Тогда центр описанной сферы располагается на центральном перпендикуляре основания на растоянии*

$$\Delta = \frac{H^2 + \delta^2 - \rho^2}{2H}$$

от плокости основания, а радиус описанной сферы равен

$$R = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta + \rho)^2} \cdot \sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2}}{2H}. \tag{4.1}$$

В частном случае, когда $\delta = 0$, то есть, вершина пирамиды проецируется в центр основания (такие пирамиды иногда называют прямыми), получаем

$$R = \frac{H^2 + \rho^2}{2H}.$$

Поскольку $H^2 + \rho^2$ в этом случае равно квадрату общей длины всех боковых рёбер, получаем хорошо известное

Следствие 4.1. *Если высота пирамиды имеет длину H, а все боковые рёбра – длину b, то радиус сферы, описанной около этой пирамиды, находится по формуле $R = b^2/(2H)$.*

Замечание 4.1. Формула (4.1) даёт явное выражение для R. На практике, однако, часто бывает удобно сначала найти R^2:

$$R^2 = \frac{H^2}{4} + \frac{\rho^2 + \delta^2}{2} + \frac{(\rho^2 - \delta^2)^2}{4H^2}. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) имеет перед (4.1) то преимущество, что в ней все промежуточые величины – H, ρ, δ – стоят во второй степени. Это важно потому, что вычисление этих величин с помощью теоремы Пифагора может порождать квадратичные иррациональности.

5. Применение теоремы 4.1

Для применения последнего результата нужно уметь находить высоту пирамиды и расстояние между ней и центральным перпендикуляром основания. Ключом к этому является нахождение основания высоты пирамиды. Покажем, как это можно проделать.

Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду $TABC$ с вершиной T (рис. 24). Пусть TT_1 – её высота. Опустим перпендикуляр T_1K на какую-нибудь сторону основания пирамиды. Соединим T с K. В силу теоремы о трёх перпендикулярах TK окажется высотой боковой грани пирамиды. Проделав это для всех сторон основания пирамиды, получим, что основание высоты пирамиды является точкой пересечения проекций на основание пирамиды высот всех её боковых граней. Используем полученный факт для нахождения высоты пирамиды и определения положения основания этой высоты. Покажем, как это делается, на конкретном достаточно неочевидном примере.

Рис. 24. Пирамида, её высота, высота боковой грани и её проекция на основание пирамиды

Пример 5.1. Найдём высоту и её основание для пирамиды, все грани которой являются треугольниками Герона (т.е. имеют стороны длины 13, 14, 15 единиц).

Замечание 5.1. Треугольную пирамиду, у которой все грани равны, называют равногранным тетраэдром, или дисфеноидом. Они хорошо изучены [4]. В частности, известно, что радиус сферы, описанной около дисфеноида с парами рёбер длины h, k, l, равен

$$\sqrt{\frac{h^2+k^2+l^2}{8}}.$$

Мы решим эту задачу, не пользуясь теорией дисфеноидов, с помощью нашей теоремы 4.1. Подчеркнём, что она справедлива *для любых* вписанных пирамид.

Решение. Все рассмотрения удобно производить на развёртке пирамиды. Изготовим её. Пусть ABC – основание пирамиды, T – её вершина.

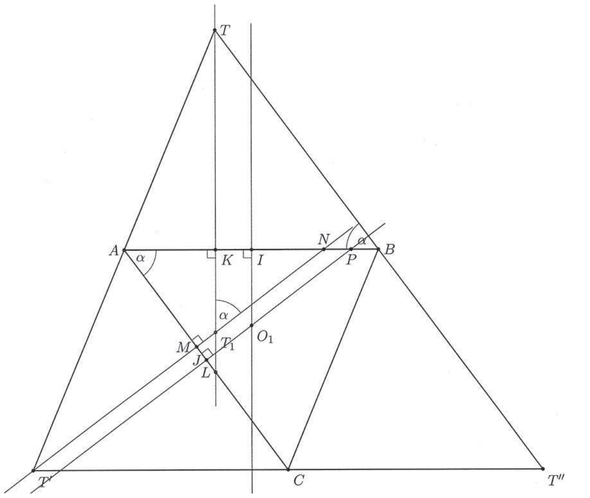

Рис. 25. Развёртка пирамиды; поиск основания высоты пирамиды

Развернём боковые грани на плоскость основания, представив их треугольниками TAB, $T'AC$, $T''BC$ (рис. 25). Пусть K – основание высоты боковой грани TAB. Через точку K на поверхности пирамиды проходят две прямых, перпендикулярных AB: одна в плоскости боковой грани, другая – в плоскости основания. На развёртке эти две прямые сливаются в одну, ибо проходят через одну точку и перпендикулярны к одной прямой. Благодаря этому мы легко находим точку пересечения перпендикуляра к AB в плоскости основания с прямой AC: проводим через T перпендикуляр к AB и продолжаем его на развёртке до пересечения с прямой AC.

Проделав то же с перпендикуляром к AC, находим основание T_1 высоты пирамиды как пересечение двух указанных перпендикуляров. Кроме того, получаем три подобных прямоугольных треугольника, AKL, AMN и NKT_1, рассматривая которые, находим значения всех необходимых величин. Поскольку эта планиметрическая работа не представляет особых затруднений, описываем её кратко.

В $\triangle TAB$:

$$TA = 13, \quad AB = 14, \quad TB = 15, \quad TK \perp AB.$$

Отсюда

$$AK = 5, \quad KB = 9, \quad TK = 12, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4},$$
$$\rho = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{13}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{65}{8}.$$

В $\triangle T'AC$ (грани TAC, положенной на плоскость основания):

$$T'A = 13, \quad T'C = 14, \quad AC = 15, \quad TM \perp AC.$$

Полагая $AM = x$, получаем, что $MC = 15 - x$. Прямоугольные треугольники $T'AM$ и $T'CM$ дают уравнение $13^2 - x^2 = 14^2 - (15-x)^2$, решая которое находим $AM = x = \frac{33}{5}$. Значит,

$$AN = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{33/5}{3/5} = 11, \quad NK = 6.$$

Пусть I и J – середины AB и AC. Проведём через них перпендикуляры к AB и AC соответственно. Пусть O_1 – точка их пересечения. Это – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Обозначим через P точку пересечения прямой JO_1 с AB. Имеем:

$$AJ = \frac{15}{2}, \; AP = \frac{AJ}{\cos\alpha} = \frac{15}{2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{25}{2}, \; IP = \frac{25}{2} - 7 = \frac{11}{2},$$
$$IO_1 = IP\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{11}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{33}{8}.$$

Из $\triangle NKT_1$: $T_1K = NK\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9}{2}$. Таким образом, основание T_1 высоты пирамиды находится на перпендикуляре к стороне AB основания, проходящем через основание K высоты боковой грани TAB, и отстоит от K на расстояние $T_1K = \frac{9}{2}$. После этого квадрат высоты $H = TT_1$ пирамиды находится из $\triangle TKT_1$:

$$H^2 = (TT_1)^2 = TK^2 - T_1K^2 = 12^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\cdot 55.$$

А $\delta = O_1T_1$ и находится как длина гипотенузы прямоугольного треугольника O_1T_1Q, где Q – основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на прямую KT_1. В этом треугольнике $O_1Q = IK = 2$, а $T_1Q = KT_1 - IO_1 = \frac{36}{8} - \frac{33}{8} = \frac{3}{8}$. По теореме Пифагора

$$\delta^2 = O_1T_1^2 = O_1Q^2 + QT_1^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{8^2}.$$

Собираем вместе уже найденое:

$$\frac{H^2}{4} = \frac{9}{16} \cdot 55; \quad \rho^2 = \frac{65^2}{64}; \quad \delta^2 = \frac{265}{64};$$
$$\frac{\rho^2 + \delta^2}{2} = \frac{65^2 + 265}{2 \cdot 64} = \cdots = \frac{5 \cdot 449}{64};$$
$$\frac{(\rho^2 - \delta^2)^2}{4H^2} = \frac{(65^2 - 265)^2}{64^2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 55} = \cdots = \frac{5 \cdot 9 \cdot 11}{64}.$$

Пользуясь формулой (4.2), находим:

$$R^2 = \frac{9}{16} \cdot 55 + \frac{5 \cdot 449}{64} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 11}{64} = \frac{295}{4},$$
$$R = \frac{\sqrt{295}}{2}.$$

Замечание 5.2. Поскольку в рассмотренном случае $h^2+k^2+l^2 = 13^2+14^2+15^2 = 590$, полученный результат совпадает с приведённым выше теоретическим.

Замечание 5.3. Обратим внимание читателя на то, как формула (4.2) позволила для такой «неправильной» пирамиды вычислить радиус описанной сферы, не прибегая к иррациональностям.

Благодарность. Автор выражает большую благодарность аннонимному рецензенту за замечания и предложения, способствовавшие улучшению статьи.

REFERENCES

1. A. V. Pogorelov, *Geometry* 10–11, Prosveshchenie, Moskva, 2014 [in Russian].
2. G. B. Dorofeev, M. K. Potapov, N. H. Rozov, *Handbook in mathematics for university entrance*, Nauka, Moskva, 1976 [in Russian].
3. V. V. Prasolov, *Problems in Stereometry*, MCNMO, Moskva, 2016 [in Russian].
4. H. C. Rajpoot, *Mathematical analysis of disphenoid (isosceles tetrahedron)*, retrieved from: `https://notionpress.com/author/HarishChandraRajpoot. (Date: 22.08.2021)`

Ryazan State University

Ryazan Institute of Education Development

State Social-Humanitarian University (t. Kolomna, Moscow Region), Russia

E-mail: `a.naziev@365.rsu.edu.ru`