

## DIE RÄUMLICHE PARABEL MIT DEM ALLGEMEINEN PUNKT $(t \mid t^2 \mid t^3)$

Jörg Meyer

**Abstract.** Die im Titel genannte Kurve wird mit elementaren, auf der Schule zugänglichen Methoden untersucht. Inhaltlich handelt es sich um Beziehungen der Raumkurve zu ebenen Kurven, zu Flächen und zu anderen Raumkurven. Ferner wird gezeigt, dass sich jede (hinreichend vernünftige) Raumkurve lokal durch die im Titel genannte Raumkurve beschreiben lässt.

*ZDM Subject Classification:* G75; *AMS Subject Classification:* 00A35.

*Key words and phrases:* Parabola, space curves, tangent, osculating and normal plane, osculating circle and sphere, torsion.

### 1. Einleitung

Monographien über Raumkurven sind selten; auch in Büchern über Differentialgeometrie oder algebraische Geometrie liegt der Schwerpunkt i.a. auf ebenen Kurven und auf Flächen. In diesem Aufsatz geht es darum, eine einfache Raumkurve exemplarisch mit elementaren Methoden (einfache Vektorrechnung, Skalar- und Vektorprodukt, Normalenformen) zu untersuchen. Bei der Untersuchung von Raumkurven leisten Projektionen eine gute Hilfe; diese liefern ihrerseits Anlass zu weiteren Fragen (auch über ebene Kurven). Tatsachen aus der Vektorgeometrie werden in einen neuen sinnvollen Kontext gestellt. Begriffe aus der Analysis wie “Tangente” oder “Berühren” werden auf Raumkurven übertragen und führen mit wenig Aufwand zu interessanten Fragestellungen. Insofern bieten Raumkurven ein interessantes Material für innermathematische Anwendungen und Erweiterungen bekannter Tatsachen; andererseits führen sie in offene Mini-Forschungsprojekte mit offenem Ende und stellen insofern Material zur Problemorientierung dar. Methodisch werden stehen die Ziele Raumanschauung, Transferfähigkeit und Selbsttätigkeit im Mittelpunkt. Dieser Aufsatz ist allerdings kein Beitrag zur (außermathematischen) Anwendungsorientierung.

Bei der Auswahl der hier dargestellten Tatsachen über Raumkurven habe ich mich auf Phänomene beschränkt, die mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems rechnerisch einfach zugänglich sind und deren Ergebnisse hinreichend “schön” sind. Letzteres gilt zum Beispiel nicht für die Evolute der im Titel genannten Kurve, und auch die Tangentenfläche wird nur am Rande gestreift.

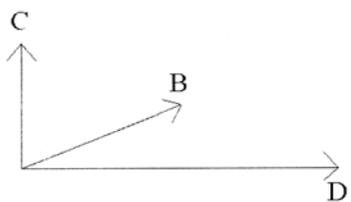
Ein Wort noch zur Notation: Im Text werden Punkte – wie auch die zugehörigen Ortsvektoren – stets in Spaltenform notiert; sie werden mit den zugehörigen Ortsvektoren identifiziert.

## 2. Ebene Parabeln im Raum

Geraden haben den allgemeinen Punkt  $P(t) = A + tB$  (mit  $A$  als "Anfangspunkt" und  $B$  als Richtungsvektor), durch  $P(t) = a + t^2B$  werden Halbgeraden beschrieben, aber was kann man über Kurven mit dem allgemeinen Punkt  $P(t) = A + tB + t^2C$  sagen?

Da jeder Punkt in der Ebene mit dem allgemeinen Punkt  $P(t, s) = A + tB + sC$  liegt, ist die gesuchte Kurve eben. Der Summand  $A$  bewirkt nur eine Translation; wir können uns daher auf den Term  $tB + t^2C$  beschränken.

Betrachten wir ein Beispiel: Es sei  $P(t) = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Richtungsvektoren  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind nicht zueinander orthogonal, aber man findet leicht, dass  $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  zu  $C$  senkrecht liegt und außerdem in der durch  $B$  und  $C$  aufgespannten Ebene liegt.

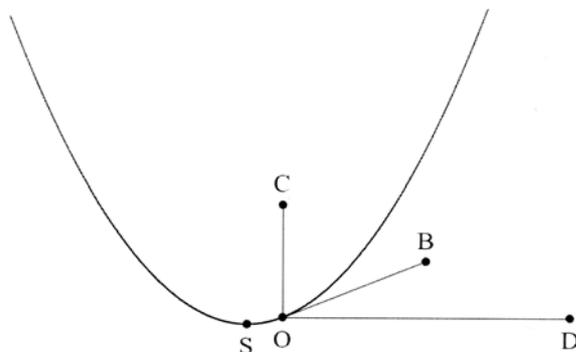


Wegen  $B = \frac{C+D}{2}$  schreibt sich der allgemeine Kurvenpunkt als

$$P(t) = tB + t^2C = t \frac{C+D}{2} + t^2C = t \frac{D}{2} + \left( \frac{t}{2} + t^2 \right) C.$$

In dem durch  $\frac{D}{2}$  und  $C$  bestimmten Koordinatensystem ist also  $P(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + t/2 \end{pmatrix}$ ; es handelt sich bei der Kurve somit um eine Parabel.

Das folgende Bild zeigt die Kurve, wenn man senkrecht auf ihre Ebene guckt.



Wenn man will, lässt sich nun noch eine quadratische Ergänzung vornehmen, um den Scheitelpunkt  $S$  zu ermitteln: Wegen

$$P(t) = t \frac{D}{2} + \left( t^2 + \frac{t}{2} \right) C = \left( t + \frac{1}{4} \right) \frac{D}{2} + \left( t + \frac{1}{4} \right)^2 C - \frac{C}{16} - \frac{D}{8}$$

ist  $S = -C/16 - D/8$ .

Durch analoge Schlüsse kann man leicht einsehen, dass jede Kurve mit dem allgemeinen Punkt  $P(t) = A + f(t)B + g(t)C$  (mit irgendwelchen Funktionen  $f$  und  $g$ ) stets eine *ebene* Kurve darstellt.

### 3. Die räumliche Parabel: Erste Eigenschaften

Im letzten Kapitel wurde kein neues Objekt beschrieben, sondern “nur” eine wohlbekanntere Kurve im Raum betrachtet. Eine “richtige” Raumkurve ist natürlich nicht eben.

Ein einfaches Beispiel für eine nicht-ebene Kurve ist die mit dem allgemeinen Punkt  $P(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ , denn beispielsweise die Punkte  $P(-1)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$  und  $P(2)$  liegen nicht in einer Ebene.

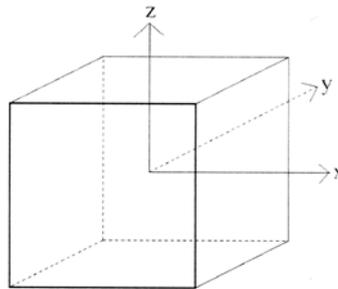
Diese Kurve soll hier “*räumliche Parabel*” heißen. Meines Wissens gibt es keinen allgemein anerkannten Namen für diese Kurve. In der älteren Literatur wird sie häufig als “kubische Parabel” bezeichnet – ein missverständlicher und sogar irreführender Ausdruck (er ist für die Kurve mit  $y = x^3$  reserviert). Seine Herkunft wird in Kapitel 5 erläutert. In der englischen Literatur heißt die Kurve “twisted cubic”. Einen ausgesprochen treffenden Namen haben die Italiener; bei ihnen wird sie “parabola gobba”, also “bucklige Parabel” genannt.

So, wie man ebene Kurven auf ihre Symmetrie untersucht, soll es auch hier geschehen; man findet leicht, dass die  $y$ -Achse Symmetrieachse ist.

Andere nicht-ebene Raumkurven sind etwa durch  $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 + t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$  (Helix), oder durch  $\begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  (Viviani-Kurve) gegeben; sie können mit Methoden untersucht werden, die zu den im Folgenden zu entwickelnden analog sind.

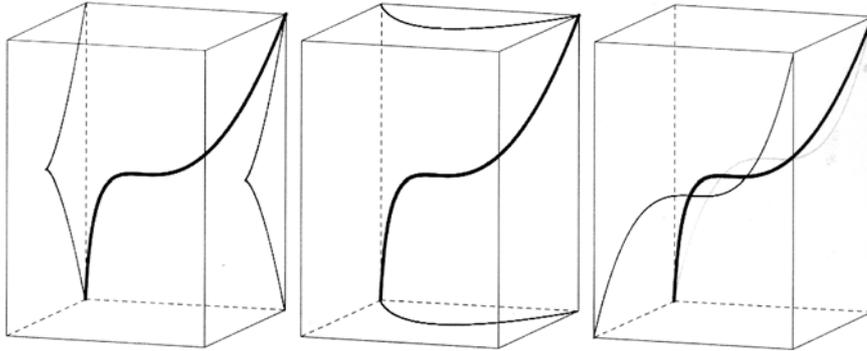
### 4. Einfache Projektionen und ein Modell

Bisher haben wir im Wesentlichen nur herausgefunden, dass die räumliche Parabel nicht eben ist. Um einen ersten Eindruck von ihrer Gestalt zu bekommen, wird sie in hier und in Kapitel 7 mit ebenen Kurven in Verbindung gebracht. Dafür bieten sich Projektionen an. Stets wird immer ein Koordinatensystem der folgenden Art zugrunde gelegt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Mitte des dargestellten Einheitswürfels.



Zunächst wird die Raumkurve auf die Koordinatenebenen projiziert. In der folgenden Graphik sind diese parallel verschoben; der dargestellte Quader ist nicht

der Einheitswürfel, sondern so bestimmt, dass die Raumkurve durch seine Ecken geht.

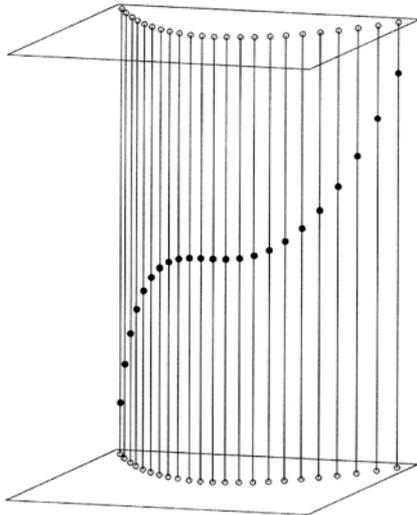


Im linken Bild handelt es sich um die  $y$ - $z$ -Koordinatenebene, und die projizierte Kurve hat dort den allgemeinen Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$  und die Gleichung  $y^3 = z^2$ ; die Kurve heißt *Neil'sche* (oder semikubische) *Parabel*. Man kann gut beobachten, welche Auswirkung die Symmetrie der Raumkurve bezüglich der  $y$ -Achse hat.

Dies gilt auch für das mittlere Bild: Hier wurde auf die  $x$ - $y$ -Koordinatenebene projiziert mit dem Ergebnis  $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$  bzw.  $y = x^2$ ; man bekommt also die gut bekannte *Normalparabel*.

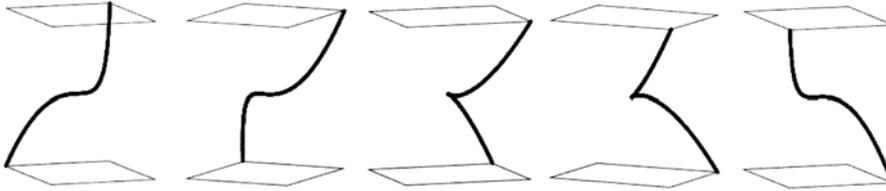
Im rechten Bild schließlich wurde die  $z$ - $x$ -Koordinatenebene verwendet, die entstehende Kurve hat den allgemein-

en Punkt  $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$  sowie die Gleichung  $z = x^3$  und ist die gewöhnliche *kubische Parabel*.

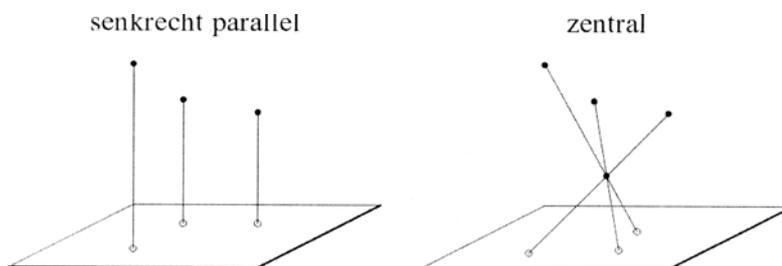


Insbesondere das mittlere Bild gibt einen Fingerzeig, wie man ein Modell der räumlichen Parabel herstellen kann: Man nehme zwei starr miteinander verbundene und zueinander parallele Ebenen. In beide bohre man kleine Löcher, die jeweils auf einer Parabel liegen sollen, und verbinde einander zugeordnete Löcher durch straffe und möglichst unauffällige Fäden. An den Fäden bringe man nun jeweils in der richtigen Höhe kleine Kugeln (etwa Kordelstopper) an.

Dreht man nun das Modell um die  $z$ -Achse, bekommt man einen ganz guten Eindruck von der Kurve. Bei der folgenden Graphik wurden die Fäden weggelassen.



Bei den bisherigen Projektionen handelte es sich um senkrechte Parallelprojektionen. Man bekommt interessantere Kurven, wenn man die räumliche Parabel zentral projiziert:



Führt man das mit dem Projektionszentrum  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und der durch  $z = e$  gegebenen Projektionsebene durch, bekommt man im wesentlichen  $\frac{1}{t^3 - 1} \begin{pmatrix} t - 1 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$  als allgemeinen Kurvenpunkt. Die Projektionskurven werden weit vielfältiger, wenn man noch anderen Zentren wählt. Hier ist eine Untersuchung mit offenem Ende angebahnt.

## 5. Die räumliche Parabel als Kegel-Schnitt

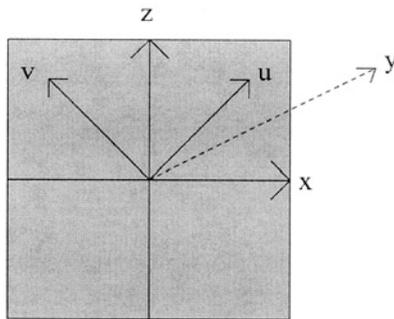
Der Inhalt dieses Kapitels lädt zur Exploration einer Fläche (schiefer Kegel) ein.

Die Fäden des letzten Kapitels stellen einen parabolischen Zylinder dar, dessen Gleichung  $y = x^2$  lautet. Die räumliche Parabel lässt sich auffassen als Schnittkurve dieses Zylinders mit einer Fläche der Gleichung  $z = x^3$  oder auch mit einer Fläche der Gleichung  $y^3 = z^2$ . Alle diese Flächen sind "Schubflächen", die dadurch entstehen, dass eine Raumkurve parallel zu sich selbst verschoben wird (im ersten Beispiel in  $z$ -Richtung, beim 2. Beispiel in  $y$ -Richtung und beim 3. Beispiel in  $x$ -Richtung).

Die Kurve liegt ebenfalls auf einer Fläche mit der Gleichung  $y^2 = xz$ . Um was für eine Fläche handelt es sich?

Flächen kann man dadurch untersuchen, indem man sie mit Ebenen schneidet und die entstehenden Schnittkurven besichtigt. Dieses Programm ist bei  $y^2 = xz$  einfacher, wenn man vorher eine Koordinatentransformation vornimmt: Man dreht  $x$ - und  $z$ -Achse um  $45^\circ$  um die  $y$ -Achse.

In den neuen Koordinaten  $u, y, v$  hat die Fläche die (viel besser zugängliche) Gleichung  $u^2 = 2y^2 + v^2$ . Schneidet man die Fläche nun mit Ebenen der Gleichung  $u = e$ , so bekommt man Ellipsen.



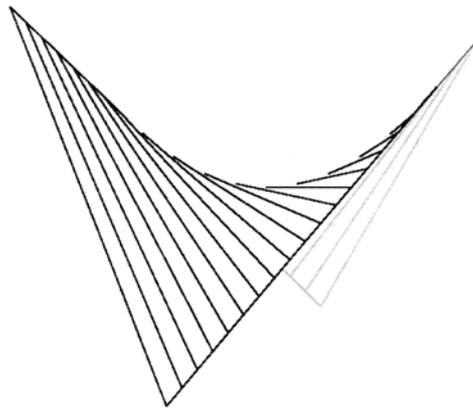
Man überlegt sich auch leicht, dass auf der Fläche Geraden liegen. Dies führt insgesamt zur Einsicht, dass es sich bei der fraglichen Fläche um einen elliptischen (Doppel-) Kegel handelt.

Aus diesem Grund nennt man die räumliche Parabel auch einen kubischen Kegelschnitt, und weil der oben erwähnte Zylinder parabolisch ist, handelt es sich um eine kubische Parabel.

## 6. Die räumliche Parabel und das hyperbolische Paraboloid

Auch der Inhalt dieses Kapitels lädt zur Erkundung einer Fläche ein; untersucht wird das hyperbolische Paraboloid (Sattelfläche).

Die räumliche Parabel liegt auch auf der Fläche mit der Gleichung  $z = xy$ . Es handelt sich um die Fläche zur Funktionsschar  $f_k(x) = kx$ , das hyperbolische Paraboloid; siehe etwa [Me1].

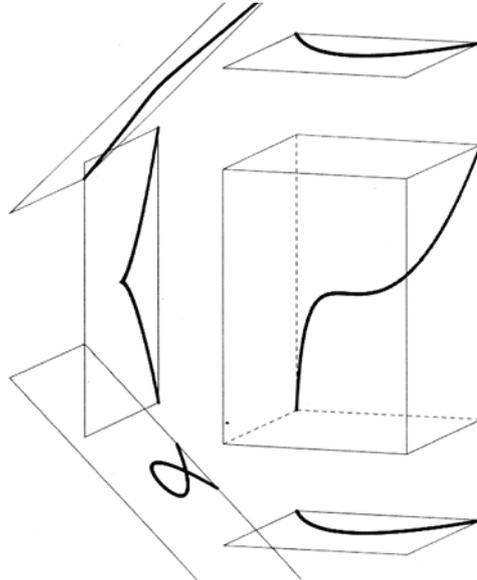


Schneidet man die Fläche mit den Ebenen zu  $x = a$ ,  $y = b$  und  $z = c$ , so bekommt man zwei Geraden- und eine Hyperbelschar. Wenn die Ebenen durch  $x + y = d$  und  $x - y = f$  gegeben sind, erhält man zwei Scharen ebener Parabeln. Dieser Sachverhalt ist der Grund für die Benennung "hyperbolisches Paraboloid".

### 7. Weitere Projektionen

Dieses Kapitel zeigt, wie die räumliche Parabel zur Untersuchung von nicht-trivialen ebenen Kurven führen kann.

In Kapitel 4 wurde die räumliche Parabel auf die Koordinatenebenen projiziert (bzw. auf dazu parallele Ebenen). Aber statt nach oben oder nach links kann man vom Ursprung aus ja auch nach links oben oder nach rechts unten gucken, und dann bekommt man Kurven zu sehen, die etwas merkwürdiger anmuten:



In direkter Aufsicht haben die Kurven die folgende Gestalt:



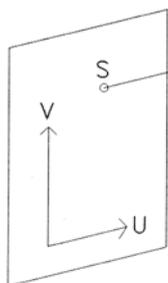
Was kann man über die Gleichungen dieser Projektionen sagen? Die Projektionsebenen rotieren um die  $y$ -Achse und haben daher Normalenvektoren der Form

$$N = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Projiziert man den Kurvenpunkt  $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$  senkrecht auf die Ebene  $E$  mit der Gleichung  $X \cdot N = 0$ , bekommt man  $S = P - \frac{P \cdot N}{N^2} N$  als Bildpunkt.

Nun möchte man  $S$  gern in einem lokalen Koordinatensystem  $\{U; V\}$  von  $E$  darstellen. Man sieht unmittelbar, dass  $E$  von den Vektoren  $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $V = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$  aufgespannt werden kann.

Somit gibt es Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $S = \alpha U + \beta V$ . Mit den üblichen Methoden ermitteln sich diese Zahlen zu  $\alpha = t^2$  und  $\beta = \frac{-ct + at^3}{a^2 + c^2}$ , so dass im lokalen Koordinatensystem der Bildpunkt die Gestalt



$K(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ (at^3 - ct)/(a^2 + c^2) \end{pmatrix}$  hat. Staucht man die lokale 2. Achse entsprechend (oder arbeitet gleich mit einem lokalen Orthonormalsystem), so bekommt man die einfachere Gestalt  $K(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ at^3 - ct \end{pmatrix}$ .

Man sieht: Für  $a > 0$  und  $b > 0$  unterscheiden sich die Kurven nur bezüglich eines Streckfaktors der 2. Achse; entsprechendes gilt für andere Vorzeichenverteilungen. Es wäre sinnvoll, den Kurvenpunkt nicht affin, sondern im projektiven Abschluss zu betrachten; man käme dann mit einem Parameter statt der beiden ( $a$  und  $c$ ) aus.

Aufgrund der Symmetrie der räumlichen Parabel zur  $y$ -Achse sind alle Projektionskurven ebenfalls symmetrisch.

Leicht ist nun der Weg vom allgemeinen Punkt zur Gleichung der Kurven (dabei werden die lokalen Koordinaten wieder mit  $x$  und  $y$  bezeichnet): Aus  $x = t^2$  und  $y^2 = t^2(at^2 - c)^2$  gewinnt man

$$y^2 = x(ax - c)^2.$$

Für  $a \neq 0$  ist der Kurvengrad 3; es handelt sich also um eine *kubische Kurve* (eine andere Erzeugungsart und weitere kubische Kurven zusammen mit anderen Projektionen finden sich in [Me2]).

Bei der Entparametrisierung hat man ein erstaunliches Phänomen: Beschreibt man die Kurve  $K$  durch die Gleichung  $y^2 = x(ax - c)^2$ , so gehört der Punkt  $Q := \begin{pmatrix} c/a \\ 0 \end{pmatrix}$  zu  $K$ . Beschreibt man hingegen die Kurve  $K$  durch ihren allgemeinen Punkt  $\begin{pmatrix} t^2 \\ at^3 - ct \end{pmatrix}$ , so gehört für  $\frac{c}{a} < 0$  der Punkt  $Q$  nicht zu ihr. Durch die Entparametrisierung ist also ggf. ein Punkt hinzu gekommen; die Beschreibungen einer Kurve durch ihren allgemeinen Punkt oder durch ihre Gleichung sind nicht immer zueinander äquivalent.

Für die weitere Untersuchung können wir uns offensichtlich auf den durch  $y = \sqrt{x(ax - c)^2}$  beschreibbaren oberen Teil der Kurve beschränken. Die Kurve hat nur für  $x \geq 0$  reelle Punkte.

Bei der Besichtigung der Kurven bemerkt man in gewissen Fällen Doppelpunkte, deren Schleifen auch zu Spitzen entarten können, und mitunter gibt es auch Wendepunkte. Nun kann man nur durch Gucken auf ein Display nicht immer gut entscheiden, unter welchen Umständen welche Phänomene vorliegen; schon die naturgemäß endliche Pixelauflösung setzt hier Grenzen. Dies liefert Anlass zum Rechnen und zur damit verbundenen begrifflichen Strukturierung.

Für  $c \neq 0 \neq a$  sieht man schnell:

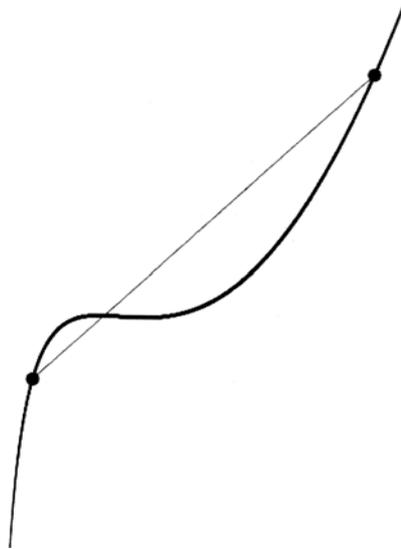
Es gibt stets einen Doppelpunkt; dieser ist aber nur für  $\frac{c}{a} > 0$  reell, und es gibt ebenso stets Wendepunkte, die aber nur für  $\frac{c}{a} < 0$  reell sind.<sup>a</sup> Wenn man will, kann man also an dieser Stelle ein Motiv entwickeln, um in das Gebiet der komplexen Zahlen einzuführen.

Bei  $c = 0$  gibt es eine Spitze, und bei  $a = 0$  erhält man nur eine quadratische Parabel.

Diese Überlegungen lassen sich in analoger Weise durchführen, wenn die Projektionsebenen um die beiden anderen Koordinatenachsen rotieren.

### 8. Sehnen

Wir kommen nun langsam zu Aspekten der Analysis. Aber bevor man sich über Tangenten Gedanken macht, sollte man sich etwas mit Sehnen auskennen. Überraschenderweise haben jedoch die Sehnen der räumlichen Parabel viel interessantere Eigenschaften als Sehnen ebener Kurven! Dies Kapitel liefert daher einen Beitrag zur unvermutet interessanten Phänomenologie der räumlichen Parabel.



Eine Sehne durch die beiden Kurvenpunkte  $P(a) = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$  und  $P(b) = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$

lässt sich leicht durch den allgemeinen Punkt  $X = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a+b \\ a^2+ab+b^2 \end{pmatrix}$  beschreiben.

Man kann sich fragen, ob die Sehne zu zwei Punkten die Kurve in einem dritten Punkt schneiden. Das ist überraschenderweise nicht der Fall: Das Gleichungssystem

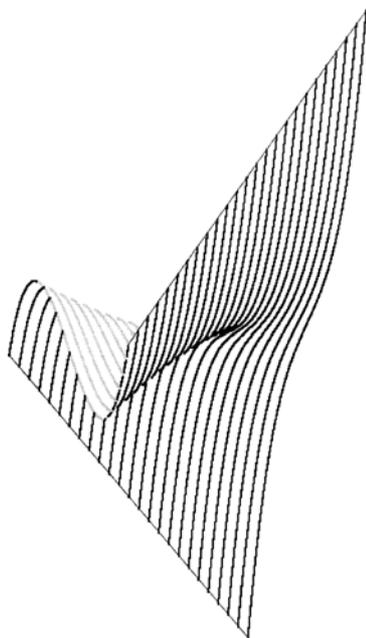
$$\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a+b \\ a^2+ab+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$$

hat nur die Lösungen  $c = a$  und  $c = b$ , wie man schon an den beiden oberen Gleichungen sieht.

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems sieht man auch leicht, dass die Sehnen zu vier paarweise verschiedenen Punkten stets zueinander windschief sind.

Ferner gilt die erstaunliche Tatsache, dass alle Sehnenmittelpunkte auf einer Fläche mit der Gleichung  $z = 3xy - 2x^3$  liegen. Ein analoges Phänomen gibt es bei ebenen Kurven nicht!

Bei dieser Fläche handelt es sich im Wesentlichen um die Fläche zur Funktionsschar  $f_k(x) = x^3 + kx$ ; siehe etwa [Me3].



## 9. Tangenten

Die Grundvorstellung bei einer Tangente, dass sie nämlich Grenzfigur von Sehnen mit aufeinander zu laufenden Kurvenpunkten ist, lässt sich bei Raumkurven ebenso formulieren:

Eine Sehne durch  $P(a)$  und  $P(b)$  hat den allgemeinen Punkt

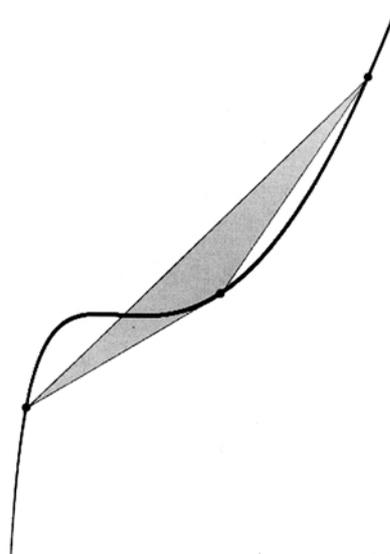
$$X = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a+b \\ a^2+ab+b^2 \end{pmatrix}.$$

Für  $b \rightarrow a$  bekommt man die Tangente im Punkt  $P(a)$  mit dem allgemeinen Punkt  $X = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 3a^2 \end{pmatrix}$ . Den Tangentenrichtungsvektor erhält man also durch "Ableiten des betreffenden Punkts". Für  $a = 0$  ergibt sich die  $x$ -Achse. Natürlich sind je zwei Tangenten zueinander windschief.

Erstaunlicherweise gibt es keine Tangente, die zur Raumdiagonalen mit der Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  parallel ist. Anders ausgedrückt: Im Unterschied zu ebenen Parabeln kommen bei räumlichen Parabeln nicht alle Richtungen vor.

### 10. Ebenen durch drei Kurvenpunkte

Bei Raumkurven hat man nicht nur Tangenten als berührende Geraden, sondern auch berührende Ebenen, die man Schmiegebenen nennt. Dabei ist die Verwendung des Wortes "berühren" durchaus gefährlich, denn so wie Tangenten eine Kurve durchsetzen können, so ist es auch mit den Schmiegebenen. Die zu Schmiegebenen angemessene Grundvorstellung ist, dass drei Schnittpunkte aufeinander zu gewandert sind. Wir beschäftigen uns daher kurz mit Ebenen, die durch drei Kurvenpunkte verlaufen. Wiederum wird ein Beitrag zur Phänomenologie der räumlichen Parabel geliefert, denn es wird sich herausstellen, dass unerwarteterweise es keine vier Kurvenpunkte gibt, die in einer Ebene liegen. Auch dies zeigt, dass die räumliche Parabel sehr un-eben ist!



Die Ebene durch die drei Kurvenpunkte  $P(a) = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ ,  $P(b) = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$  und

$P(c) = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$  hat die Gleichung

$$X \cdot \begin{pmatrix} ab + bc + ca \\ -(a + b + c) \\ 1 \end{pmatrix} = abc.$$

Schneidet man die Ebene durch  $P(a)$ ,  $P(b)$  und  $P(c)$  mit der räumlichen Parabel, so bekommt man die Schnittgleichung  $(t - a)(t - b)(t - c) = 0$ . Also liegt auf der Ebene kein weiterer Kurvenpunkt.

### 11. Schmiegeebenen

Werden bei zweidimensionalen Funktionsgraphen die Tangenten auch dazu verwendet, um über Extrema Auskünfte zu bekommen, so nehmen Schmiegeebenen diese Rolle bei Raumkurven ein. Darüber hinaus haben Schmiegeebenen interessante geometrische Eigenschaften.

Lässt man bei der Ebene durch die drei Punkte  $P(a)$ ,  $P(b)$  und  $P(x)$  den Punkt  $P(b)$  gegen  $P(a)$  und gleichzeitig auch den Punkt  $P(c)$  gegen  $P(a)$  laufen, so bekommt man die Schmiegeebene in  $P(a)$  mit der Gleichung  $X \cdot \begin{pmatrix} 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix} = a^3$ :

Keine Schmiegeebene schneidet die räumliche Parabel in einem weiteren Punkt.

Man rechnet leicht nach, dass die Schmiegeebene zu  $P(a)$  von  $P'(a)$ , dem Richtungsvektor der Tangente, und von  $P''(a)$  aufgespannt wird.

Die räumliche Parabel durchsetzt die Schmiegeebene, wie man etwa folgendermaßen einsieht: Der Abstand von  $P(t)$  zur Schmiegeebene zu  $P(a)$  lässt sich über die Hesse'sche Normalform leicht berechnen; er beträgt

$$\frac{\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix} - a^3}{\left| \begin{pmatrix} 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{(t - a)^3}{\left| \begin{pmatrix} 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

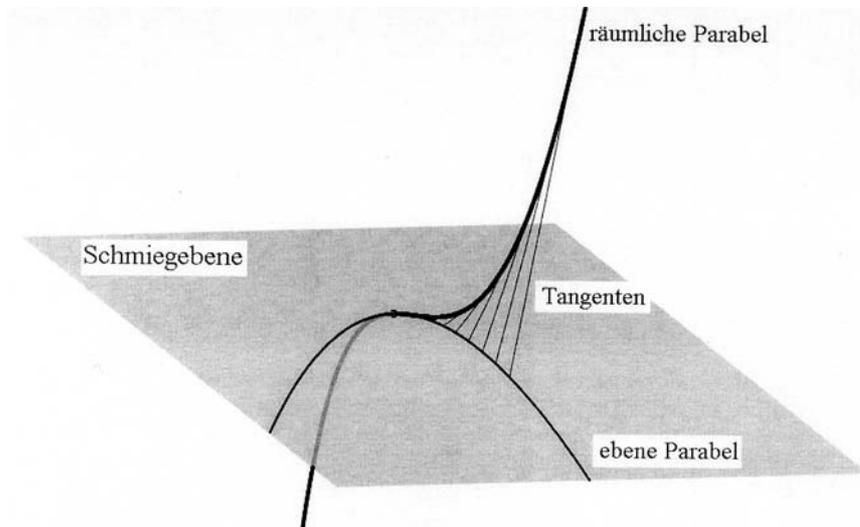
und wechselt somit bei  $t = a$  das Vorzeichen.

Die Schnittgerade zweier Schmiegeebenen kann nie Tangente oder Sehne an die räumliche Parabel sein. Das ist leicht zu sehen, denn der allgemeine Punkt der Schnittgeraden ist durch  $\begin{pmatrix} (a + b)/3 \\ ab/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a + b \\ 3ab \end{pmatrix}$  gegeben; man sieht am Richtungsvektor, dass die Schnittgerade für  $a \neq b$  nicht Tangente oder Sehne sein kann.

Interessant und verblüffend ist die folgende Eigenschaft: Der Schnittpunkt  $S$  dreier Schmiegeebenen (die zu den Parametern  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gehören mögen) lautet  $S =$

$\begin{pmatrix} (a+b+c)/3 \\ (ab+bc+ca)/3 \\ abc \end{pmatrix}$ . Man sieht, dass  $S$  in der zu  $a, b, c$  gehörigen Dreipunktebene liegt. Ein solches Phänomen gibt es bei ebenen Kegelschnitten nicht!

## 12. Tangenten und Schmiegeebenen



Von Möbius wurde das folgende Phänomen entdeckt [GT; S. 428]: Man betrachte für  $a \neq b$  den Schnittpunkt der Schmiegeebene zu  $P(a)$  mit der Tangente zu  $P(b)$ . Er ist durch

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} a+2b \\ 2ab+b^2 \\ 3ab^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} + b^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ a \end{pmatrix}$$

gegeben. Wenn  $b$  alle möglichen Kurvenparameter durchläuft, bekommt man nach den Erkenntnissen aus Kapitel 2 eine ebene Parabel.

## 13. Tangenten und Schmiegeebenen allgemeiner Raumkurven

Die weiteren Ausführungen betreffen *Krümmungsbegriffe*. Dabei soll hier nicht der übliche Weg eingeschlagen werden, die Kurve nach ihrer Bogenlänge zu parametrisieren.

Die Methode und auch die Formeln gestalten sich transparenter, wenn wir verallgemeinern. Wir betrachten den allgemeinen Kurvenpunkt  $P(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ ; Begriffe wie Tangente oder Schmiegeebene beziehen sich auf den speziellen Punkt

$A := P(a)$ . Dabei sei  $A' = \begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \\ h'(a) \end{pmatrix}$  usw. Das zentrale Hilfsmittel bei der weiteren Untersuchung ist die Taylorentwicklung

$$P(t) = A + \frac{A'}{1!}(t-a) + \frac{A''}{2!}(t-a)^2 + \frac{A'''}{3!}(t-a)^3 + \dots$$

Wir interessieren uns zunächst für die *Tangente* im Punkt  $A$ .

Wir betrachten zunächst eine beliebige Gerade durch  $A$  mit dem Richtungsvektor  $R$ . Jeder Punkt auf ihr ist dadurch charakterisiert, dass  $X - A$  zu  $R$  parallel ist,

dass also  $(X - A) \times R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist (Plücker-Form). Wenn die Gerade Tangente sein soll, muss sie die Kurve in  $A$  mindestens doppelt schneiden. Die Schnittgleichung lautet  $(P(t) - A) \times R = 0$ . Setzt man die Taylorentwicklung in die Schnittgleichung ein, erhält man

$$\frac{A' \times R}{1!}(t-a) + \frac{A'' \times R}{2!}(t-a)^2 + \frac{A''' \times R}{3!}(t-a)^3 + \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die den Punkt  $A$  beschreibende Lösung  $t = a$  ist doppelt, wenn  $A' \times R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist. Unter der Voraussetzung, dass  $A' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, muss also  $R \parallel A'$  sein; daher ist die Tangente zu  $A$  durch den allgemeinen Punkt

$$X_\lambda = A + \lambda A'$$

gegeben. Senkrecht auf der Tangente steht die *Normalebene* durch  $A$  mit der Gleichung

$$(X - A) \cdot A' = 0.$$

Nun wenden wir uns der *Schmiegungeebene* zu: Eine beliebige Ebene durch  $A$  hat die Form  $(X - A) \cdot N = 0$  mit noch unbestimmtem  $N$ . Wenn die Ebene Schmiegungeebene sein soll, muss sie die Kurve in  $A$  mindestens dreifach schneiden. Die Schnittgleichung lautet  $(P(t) - A) \cdot N = 0$ . Mit dem Satz von Taylor folgt

$$\frac{A' \cdot N}{1!}(t-a) + \frac{A'' \cdot N}{2!}(t-a)^2 + \frac{A''' \cdot N}{3!}(t-a)^3 + \dots = 0.$$

Die den Punkt  $A$  beschreibende Lösung  $t = a$  ist dreifach, wenn  $A' \cdot N = 0$  und  $A'' \cdot N = 0$  ist. Man kann daher  $N = A' \times A''$  wählen.

Unter der Voraussetzung, dass  $A' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A'' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, ist die Schmiegungeebene zu  $A$  daher durch

$$(X - A) \cdot B = 0$$

mit  $B := A' \times A''$  gegeben. Wie man sieht, steht sie immer senkrecht auf der Normalebene.

Zu den beiden Ebenen durch  $A$  kann man nun noch eine dritte betrachten, die auf der Normal- und auf der Schmiegungebene senkrecht steht. Sie heißt *rektifizierende Ebene* und hat die Gleichung

$$(X - A) \cdot C = 0$$

mit

$$C := A' \times B = A' \times (A' \times A'').$$

In der Differentialgeometrie bilden diese drei Ebenen zusammen mit den Frenet-schen Formeln die Grundlage fast aller Betrachtungen. Der Normalenvektor  $C$  der rektifizierenden Ebene hat die Länge  $|C| = |A'| \cdot |B|$ . Wir werden später die Identität

$$A'' \cdot C = -B^2$$

benötigen, die sich leicht beweisen lässt: Bezeichnet man mit  $[A, B, C] = A \cdot (B \times C)$  das Spatprodukt, so gilt nämlich  $A'' \cdot C = [A'', A', B] = -[B, A', A''] = -B^2$ .

#### 14. Die Krümmungsachse

Wenn man Krümmungskreis und Krümmungskugel untersuchen will, kann man einheitlich beginnen:

Wir suchen diejenigen Kugeln, die die Kurve in  $A$  (mindestens) dreifach berühren. Eine beliebige Kugel mit Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $r$  hat die Gleichung  $(X - Z)^2 = r^2$ . Wenn  $A$  auf der Kugel liegen soll, muss  $(A - Z)^2 = r^2$  gelten; die Schnittgleichung von Kugel durch  $A$  und Kurve lautet dann  $(A - Z)^2 = (P(t) - Z)^2$ , was sich auch als  $(P(t) + A - 2Z) \cdot (P(t) - A) = 0$  schreiben lässt. Mit dem Satz von Taylor folgt

$$(t - a) \cdot 2[(A - Z) \cdot A'] + (t - a)^2[(A - Z) \cdot A'' + A'^2] + (t - a)^3 \cdot \frac{1}{3}[(A - Z) \cdot A''' + 3A' \cdot A''] + \dots = 0.$$

Für das Weitere setzen wir voraus, dass  $A' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A'' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A''' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sein soll.

Die Schnittgleichung hat  $t = a$  sogar als dreifache Lösung, wenn

$$(E1) \quad (A - Z) \cdot A' = 0$$

und

$$(E2) \quad (A - Z) \cdot A'' + A'^2 = 0$$

gilt. Der gesuchte Mittelpunkt  $Z$  erfüllt beide (Ebenen-)Gleichungen (die erste sagt aus, dass  $Z$  auf der Normalebene zu  $A$  liegen muss) und liegt auf der Schnittgeraden. Diese heißt *Krümmungsachse*; sie hat  $B = A' \times A''$  als Richtungsvektor.

Mit (E1) und (E2) ist noch kein eindeutiger Mittelpunkt eines Krümmungskreises oder einer Krümmungskugel gefunden. Dazu muss man weitere Forderungen aufstellen. Das geht auf zwei Arten:

### 15. Der Krümmungskreis

Wir suchen denjenigen Kreis, der mit der räumlichen Parabel in  $A$  einen mindestens 3-fachen Schnittpunkt hat. Sein Mittelpunkt  $Z$  liegt auf der Krümmungsachse und ebenfalls auf der Schmiegungebene, erfüllt also die Gleichung

$$(E3) \quad Z \cdot B = A \cdot B.$$

Dadurch ist der Mittelpunkt des Schmiegungekreises durch die drei Gleichungen (E1), (E2) und (E3) eindeutig festgelegt.

Zur Bestimmung von  $Z$  wird man nun nicht zunächst die Krümmungsachse ausrechnen; es ist nämlich viel geschickter, zunächst (E1) mit (E3) zu schneiden, da man hier das Ergebnis sofort hinschreiben kann: Es ist eine Gerade mit  $Z = A + \lambda C$ .

Schneidet man diese Gerade mit (E2), so bekommt man  $Z = A + \frac{A'^2}{A'' \cdot C} C$ .

Nun ist die Krümmung der reziproke Abstand von  $Z$  und  $A$ ; es ergibt sich  $\kappa(a) = \frac{1}{\sqrt{(Z-A)^2}} = \frac{A'' \cdot C}{A'^2 |C|} = -\frac{B^2}{A'^2 |A'| \cdot |B|}$  und damit unter Vernachlässigung des Vorzeichens

$$\kappa(a) = \frac{|B|}{|A'|^3}.$$

### 16. Die Krümmungskugel

Wir suchen nun diejenige Kugel, die mit der Raumkurve einen mindestens 4-fachen Schnittpunkt hat. Der Mittelpunkt  $M$  liegt auf der Krümmungsachse; zusätzlich zu den Gleichungen

$$(E1) \quad (A - M) \cdot A' = 0$$

und

$$(E2) \quad (A - M) \cdot A''' + A'^2 = 0$$

muss noch

$$(E4) \quad (A - M) \cdot A''' + 3A' \cdot A'' = 0$$

gelten. Der durch (E1), (E2) und (E4) bestimmte Kugelmittelpunkt  $M$  stimmt bei nicht-ebenen Kurven nicht überein mit dem Krümmungskreismittelpunkt  $Z$ . Man könnte nun den Abstand zwischen  $Z$  und  $M$  als Maß für die Abweichung von der Ebenheit definieren; aus Gründen, die im nächsten Kapitel erläutert werden, favorisiert man in der Differentialgeometrie allerdings ein anderes Maß (die Torsion). Leider gilt, dass die Torsion sich nicht so leicht geometrisch interpretieren lässt wie die Krümmung ([Str]; S. 17).

Diese Betrachtungen über die Krümmungskugel sollen auf das (naiv nicht zu erwartende) Phänomen hinweisen, dass die beiden möglichen Arten, eine Krümmung zu definieren, nämlich über Kreise und über Kugeln, nicht notwendig zum gleichen Ergebnis führen.

### 17. Zur Torsion

Die Vektoren  $A'$ ,  $B$  und  $C$  sind zueinander orthogonal. Daher kann man jeden Kurvenpunkt in der Form  $P(t) = A + \alpha \frac{A'}{|A'|} + \beta \frac{B}{|B|} + \gamma \frac{C}{|C|}$  schreiben. Die Koeffizienten ermitteln sich mit Hilfe der Taylorentwicklung auf die übliche Weise:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(P(t) - A) \cdot A'}{|A'|} = |A'|(t - a) + (t - a)^2(\dots), \\ \beta &= \frac{(P(t) - A) \cdot B}{|B|} = \frac{A''' \cdot B}{6|B|}(t - a)^3 + (t - a)^4(\dots), \\ \gamma &= \frac{(P(t) - A) \cdot C}{|C|} = \frac{A'' \cdot C}{2|C|}(t - a)^2 + (t - a)^3(\dots).\end{aligned}$$

Nun lässt sich der Koeffizient des quadratischen Terms bei  $\gamma$  auch (mit Hilfe der in Kap. 13 erwähnten Identität) schreiben als  $\frac{A'' \cdot C}{2|C|} = -\frac{B^2}{2|A'||B|} = -\frac{|B|}{2|A'|}$ .

Mit der Abkürzung  $s := |A'|(t - a)$  folgt nun

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{|B|}{2|A'|^3} s^2 + s^3(\dots) = -\kappa(a) \frac{s^2}{2!} + s^3(\dots) \\ \text{und } \alpha &= \frac{s}{1!} + s^2(\dots).\end{aligned}$$

Hier ist ein Muster zu erkennen! Zum Abschluss widmen wir uns  $\beta$ :

$$\beta = \frac{A''' \cdot B}{6|B||A'|^3} s^3 + s^4(\dots) = \frac{A''' \cdot B}{|B|^2} \kappa(a) \frac{s^3}{3!} + s^4(\dots).$$

Der Beifaktor

$$\tau(a) := \frac{A''' \cdot B}{|B|^2}$$

heißt *Torsion*; alsdann ist  $\beta = \tau(a)\kappa(a) \frac{s^3}{3!} + s^4(\dots)$ , und wir haben insgesamt die schöne Aussage, dass sich bezüglich der drei obigen Normalenvektoren jeder Kurvenpunkt (wenn seine ersten beiden Ableitungen nicht verschwinden) schreibt als

$$\begin{aligned}P(t) = A + \left(\frac{s}{1!} + s^2(\dots)\right) \frac{A'}{|A'|} + \left(-\kappa(a) \frac{s^2}{2!} + s^3(\dots)\right) \frac{C}{|C|} \\ + \left(\tau(a)\kappa(a) \frac{s^3}{3!} + s^4(\dots)\right) \frac{B}{|B|}\end{aligned}$$

oder (unter Vernachlässigung höherer Potenzen)

$$P(t) = A + \begin{pmatrix} -\frac{\kappa(a)}{2} s^2 \\ \frac{\tau(a)\kappa(a)}{6} s^3 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich die Kurve lokal tatsächlich durch eine (geeignet gestreckte) räumlich Parabel beschreiben.

#### LITERATUR

- [GT] Gomes Teixeira, F., *Traité des courbes spéciales remarquables*, Tome II. Nachdruck bei Éditions Jacques Gabay, Paris.
- [Me1] Meyer, J., *Die Sattelfläche im Grundkurs*, Praxis der Mathematik **37** (6), 250–255 (1995).
- [Me2] Meyer, J., *Von der Normalparabel zu kubischen Kurven*, Mathematica Didactica **21** (2), 84–108 (1998).
- [Me3] Meyer, J., *Eine Fläche mit einer Falte*, In: Hischer, H. (Hrsg.): *Geometrie und Computer*, Verlag Franzbecker, 89–94 (1998).
- [Str] Struik, D., *Lectures on Classical Differential Geometry*, 1988 New York, Dover Publications (Nachdruck der zweiten Auflage von 1961).

Jörg Meyer, Schäfertrift 16, 31789 Hameln, Germany  
E-mail: J.M.Meyer@t-online.de