THE TEACHING OF MATHEMATICS
2005, Vol. VIII, 2, pp. 83–87

ПРОБЛЕМА ВВЕДЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

В. К. Руновский

Abstract. Following the requirements elaborated by Academician S. M. Nikol'skii and Professor M. K. Potapov that fundamental mathematical concepts of school mathematics at any level have to be motivated by the practical use, the author treats a way in which variables enter school contents. Here, this way is condensed in the form of a series of definitions.

ZDM Subject Classification: E40; *AMS Subject Classification*: 00 A 35

Key words and phrases: Justification principle; defining basic mathematical concepts.

Одной из важнейших составляющих математического образования на любом уровне является введение фундаментальных математических понятий. Эта проблематика находится в русле разрабатываемой академиком С. М. Никольским и членами его рабочей группы идеологии школьного образования и обсуждалась с профессором М. К. Потаповым, который является научным руководителем методического кабинета Механико-математического факультета МГУ.

Многовариантность введения различных математических понятий и наблюдение за успешностью их усвоения подсказывает основной принцип, который следует соблюдать при введении этих понятий в учебном процессе. Этот принцип, который будем называть принципом обоснованности, заключается в том, что введение понятия должно быть обосновано его необходимостью при решении типовых задач практики, то есть, образно говоря, понятия для обучаемого должны «вырастать» из практики, которая, таким образом, объясняет его происхождение.

Значение принципа обоснованности заключается в том, что, этот принцип, во-первых, обеспечивает знакомство с приёмами моделирования действительности в виде типизации практических задач, что приводит к развитию исследовательских навыков обучаемого и, во-вторых, даёт возможность исключать введённые абстракции в практику прежде всего при решении тех практических задач, для которых и проводилась их типизация.

Напротив, несоблюдение принципа обоснованности, то есть явный отказ от него или его формальное соблюдение, которое проявляется в ошибочном толковании происхождения понятия, не даёт возможности обучаемому применить полученные знания на практике или приводит к необоснованным правилам исклюучении введённых абстракций в практику. В связи с этим уместно напомнить содержащееся в предисловии книги Анри Лебега «Измерение величин» высказывание академика А. Н. Колмогорова о том, что отрыв в школьном преподавании математических понятий от их происхождения приводит к полной беспринципности и логической дефектности курса.

Те не менее, в современной учебной литературе можно наблюдать далеко не единичные случаи несоблюдения принципа обоснованности как в виде явного отказа от него, так и в виде его формального соблюдения. Например, распространённое введение переменной как буквы, которая может принимать различные значения, или как пустого места в формуле, замещённого буквой, вместо которой разрешается подстановка имён индивидуумов из определённой предметной области, есть иллюстрация явного отказа от принципа обоснованности. При этом значения переменной отождествляются с элементами данной предметной области и это отождествление делает невозможным как определение пары с равными элементами, тако и определение разных переменных с одной и той же областью изменения.

Соблюдая принцип обоснованности при введении понятия переменной и связанных с ним понятий, по нашему мнению можно разработать методику приводящую к следующим определениям.

Определение 1. Пусть X' – предметная область, элементы которой имеют собственные названия. Тогда некоторый символ, например, x' называется *переменным символом x' с областью изменения X'*, если для любого элемента этой области символ x' заменяется одним из собственных называний данного элемента.

Определение 2. Два переменных символа x' и x'' с областями изменения X' и X'' называются *эквивалентными*, если данные области равны и для любого элемента области $X = X' = X''$ символ x' заменяется одним из собственных названий данного элемента области X в том и только в том случае, если этим собственным названием заменяется символ x''.

Легко видеть, что введённое отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и поэтому множество переменных символов разбивается на классы эквивалентности.

Определение 3. Пуст (x) – класс эквивалентности переменных символов и X – их общая область изменения. Тогда *переменной x с областью изменения X* называется обозначенный буквой x абстрактный объект, заменяемый одним из собственных названий любого элемента области X, если этим названием заменён каждый переменный символ из класса (x). При этом для любого элемента области X данный элемент этой области, одним из собственных названий которого заменяется переменная x, называется *значением переменной x*. В связи с этим для любого элемента области X данный элемент этой области, который является значением переменной x, называется *значением переменной x, равным данному элементу*. Причём, заменяя переменную x любым собственным названием данного элемента области X, говорят, что переменной *x придано* значение, равное данному элементу, или говрят, что переменная *x приняла* это значение.

Из данного определения следует, что каждый класс эквивалентности переменных символов определает по одной переменной, причём для разных классов эквивалентности эти переменные являются *разными* даже в случае совпадения их областей изменения. Причём в виду определений 2 и 3 разные переменные могут одновременно принимать значения, равные элементам, которые не равны друг другу, и, значит, значения разных переменных, равные данным элементам, являются *разными* даже в случае равенства этих элементов.

Разные переменные обозначаются разными буквами x, y, z, $\ldots$, а их области изменения – соответственно большими буквами X, Y, Z, $\ldots$ или соответственно символами $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\ldots$

Следует заметить, что в виду определения 3 значение перменной, равное данному элементу, есть этот элемент, тогда как сам этот элемент только может быть значением данной переменной и поэтому, во-первых, значение переменной, равное данному элементу, нельзя отождествлять с самим этим элементом и, во-вторых, область изменения переменной есть множество её *возможных* значений.

Определение 4. Пусть x и y – две переменные с областями изменения X и Y и пусть a и b – элементы соответственно областей X и Y (возможно, что $a = b$). Тогда двухэлементное множество, образованное из значения переменной x, равного a, и значения перменной y, равного b, и упраядоченное так, что данное значение переменной y следует за данным значением переменной x, называется *парой значений a и b переменных x и y* и обозначается символом (a, b). При этом значение переменной x, равное a, и значение переменной y, равное b, называются соответственно *первыми* и *вторыми элементами* пары (a, b). Кроме того для любого значения переменной x и любого значения переменной y пара данных значений переменных x и y называется *парой значений переменных x и y*, а множество всех этих пар – *произведением множества X на множество Y*, которое обозначается символом $X \times Y$.

Примером формального соблюдения принципа обоснованности при введении понятия является широко распространённое определение функции как зависимой переменной. Рассмотрим это определение.

Начинают обычно с напоминания формул для геометрических и физических величин. Например, так:

Пример 1. Пусть a – длина стороны квадрата, а S – его площадь. Тогда, как известно, площадь S вычисляется по формуле

$$S = a^2 \quad (a > 0).$$

Пример 2. Пусть l – путь, пройденные материальной точкой за время t при равномерном движении со скоростью v. Тогда, как известно, путь l вычисляется по формуле

$$l = v \cdot t \quad (t \geqslant 0).$$

Далее заявляется, что в данных формулах a и t – независимые переменные, а S и l – зависимые переменные или функции соответственно переменных a и t.

Однако, такое введени понятия функции, хотя формально и соблюдает принцип обоснованности, является, вместе с тем, ошибочным, так как буквы S и l в условиях примеров 1 и 2 – не переменные, а соответственно площадь квадрата со стороной a и путь, пройденный материальной точкой за время t, т.е. именные формы соответственно с переменными a и t.

Для того, чтобы получить определение любой функции с одной переменной, действительно соблюдать принцип обоснованности, следует привести примеры таких задач для тождественно равных именных форм с одной переменной, чтобы эти задачи имели один и тот же способ решения, приводяший к одинаковым ответам (например, задача о мгновенной скорости свободного падения и задача об угловом коэфициенте касательной к параболе) и поставить проблему исключения повторяемости по сути дела одного и того же решения для каждой из тождественно равных именных форм с одной переменной. Заметить, далее, что для решения этой проблемы придётся ввести абстрактный объект с одной переменной, тождественно равный каждой из именных форм заданного класса тождественно равных именных форм с заданной переменной, но который не является ни одной из этих форм. Ввести далее этот абстрактный объект, называемый функцией с одной переменной.

Таким образом, соблюдая принцип обоснованности, приходим к следуюшим определениям.

Определение 5. Пусть (f) – класс тождественно равных на множестве $X(f)$ именных форм с одной переменной x. Тогда, абстрактный объект, имеющий при любом x из $X(f)$ значение, которое равно общему значению всех именных форм из класса (f) при данном x, называется *функцией* $f(x)$. При этом множество $X(f)$ называется *областю определения* функции $f(x)$, каждая именная форма из класса (f) – *представителем* функции $f(x)$, а для каждого x из $X(f)$ общее значение именных форм из (f) называется *значением* функции $f(x)$ при данном x и обозначается символом $f(x_0)$, если x_0 – данное значение переменной x.

Из данного определения и определения значения именной формы следует, что на множестве $X(f)$ функция $f(x)$ тождественно равна любому своему представителю, который и задаёт эту функцию.

Определение 6. Пусть для функции $f(x)$ множество $X(f)$ – её область определения, а множество $Y(f)$ – множество её значений. Тогда переменная x с областю изменения $X(f)$ называется *независимой переменной* или *аргументом* функции $f(x)$, а переменная y с областью изменения $Y(f)$ – *зависимой переменной* данной функции, если для каждого x из $X(f)$ переменная y принимает значение, равное значению функции $f(x)$ при данном x. Причём это принятое значение переменной y называется *значением* зависимой переменной y при данном x или *значением* зависимой переменной y, соответствующим данному x, и обозначается символом $y|_{x=x_0}$, если x_0 – данное x. Так что $y|_{x=x_0} = f(x_0)$ для любого значения x_0 аргумента x.

Определение 7. Предложение $y = f(x)$, правой частю которого является функция $f(x)$, а левой – зависимая переменная y данной функции, называется *формулой* функции $f(x)$, если данное предложение считается общей формой истинных суждений $y|_{x=x_0} = f(x_0)$, где $x_0 \in X(f)$ (если в предложении $y = f(x)$

переменную y считать независимой переменной, то данное предложение становится уравнением графика данной функции).

Заметим, что приведённые определения переменных и функций принадлежат к так называемым определениям через абстракцию, широко используемых в математике. Достаточно вспомнить хотя бы определения натуральных чисел и свободных векторов. Поэтому проблемы адаптации к школьному образованнию понятий переменных, функций, свободных векторов и других понятий, вводимых определениями указанного вида, по сути дела совпадают.

По нашему мнению эту общую проблему следует решать только для классов с углубленной математической подготовкой, а для общеобразовательных классов её следует вовсе снять, заменяя к примеру переменные переменными символами, функции именными формами и векторы направленными отрезками. Для дифференциального исчисления это означает, что задачи этого исчисления следует формулировать и решать для именных форм и их зависимых переменных, называя эти формы выражениями с одной переменной. Причём в отличие от дифференциального исчисления для функций при решении задач этого исчисления, изложенного для выражений, следует лишь отмечать, что для любого выражения, тождественно равного данному, решение будет тем же самым.

В заключении отметим, что разработка современных методик преподавания школьной и вузовской математики, основанных на введении функдаментальных математических понятий в соответствии с принципом обоснованности, имеет целью улучшение качества математического образования.

г. Муром, Владимирская область, Российская Федерация

E-mail: runovsk@mail.ru