THE TEACHING OF MATHEMATICS
2006, Vol. IX, 2, pp. 31–40

DUALITÄTSPRINZIP UND MUSIKALISCHE INTERPRETATION DER KOMPLEXEN ZAHLEN

Miloš Čanak

Abstract. Although expressed in the same way in different sciences and arts and in the case of nature, the principle of duality resumes various phenomenological forms. That fact is demonstrated in this paper by a comparative consideration of complex numbers and their conjugate values in mathematics and of big and small terza and the relation "major-minor" in music, including also the teachings about Jin and Jang which represent the formulation of the ancient Chinese "Book of Change – Jih Djing".

Using Weber-Fechner's Law, a musical interpretation of complex numbers and operations with them is developed, particularly observing musical chords. On the other hand, chords of classic tonality (dyatonal quadritones) correspond to the eight trigrams in the Book of Change. Finally, without entering some deeper area of mathematics, elements of combinatorics and interpretations by means of regular polygons can be applied to the whole Book of Change, what closes this sort of considerations.

ZDM Subject Classification: F55; *AMS Subject Classification*: 00A99.

Key words and phrases: Duality principle; Chinese Book of Change; musical interpretation of complex numbers.

1. Einführung

Es ist auch ein anderer Titel dieser Arbeit möglich "Warum ist die klassiche Musik schön?". Auf dem Weg zur Antwort gehen wir durch den terzen Aufbau der Akkorde, das chinesische Buch der Wandlungen Jih Djing und die komplexen Zahlen. Dabei sehen wir, dass die Harmonie der klassichen Musik ein Bild und einen Teil der universalen Weltharmonie darstellt und diese Harmonie grundet sich am Dualitätsprinzip. Ein der Aspekten dieses Dualitäts ist die grosse und kleine Terz, wie auch der Terzenaufbau der Akkorde. Die grösste Komponisten wie Bach, Mozart und Bethowen haben ihre Werke auf den festen und natürlichen Fundamenten gebaut. Ein von diesen Fundamenten war der Terzenaufbau der Akkorde. In dieser Arbeit untersucht man auch die Zasammenhang mit den komplexen Zahlen.

2. Über das zwölftönige gleichtemperierte Tonsystem

In diesem Tonsystem sind, innerhalb einer Oktave, zwölf Tonschritte eingebaut, so dass der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne, $q = \sqrt[12]{2}$ ist. So erhält man die folgende Zahlenfolge

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c & des & d & es & e & f & fis & g & as & a & b & h & c' \\ 1 & \sqrt[12]{2} & \sqrt[6]{2} & \sqrt[4]{2} & \sqrt[3]{2} & \sqrt[12]{2^5} & \sqrt{2} & \sqrt[12]{2^7} & \sqrt[3]{2^2} & \sqrt[4]{2^3} & \sqrt[6]{2^5} & \sqrt[12]{2^{11}} & 2 \end{array}$$

Hier sehen wir, dass in dieser Reihe ein Logarithmensystem mit der Basis $\sqrt[12]{2}$ vor uns steht, die Logarithmen sind die Exponenten $0, 1, 2 \ldots, 12$. In der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts wurden die Logarithmen erfunden und die ersten Tafeln hergestellt und in der zweiten Hälfte desselben Jahrhunderts führte der Halberstädter Orgelbauer Andreas Werkmeister die moderne Stimmung ein.

Wenn wir die Töne der gleichtemperierten Tonleiter als die Scheitel eines regulären Zwölfeckes darstellen, so können wir sukzessiv die regulären Vielecke einschreiben und die entsprechenden musikalischen Bedeutungen beifügen.

(a) Durch Verbindung der gegenseitigen Punkte und Töne erhält man 6 Tritone (übermässige Quarte oder verminderte Quinte: C–Fis, Des–G, D–As, Es–A, E–B, F–H). Tritonus ist einerseits das dissonanteste musikalische Intervall und andererseits der Hauptfaktor der musikalischen Kinetik und eine der Grundlage für die Tonalitätstheorie (siehe [1] und [2]).

(b) Vier eingeschriebene gleichseitige Dreiecke stellen vier übermässige Dreiklänge (C–E–Gis, Des–F–A, D–Fis–Ais, Es–G–H) dar.

(c) Drei eingeschriebene Quadrate repräsentieren drei verminderte Vierklänge (C–Es–Ges–Heses, Cis–E–G–B, D–F–As–Ces).

(d) Wenn wir unsere Bewegung von Fis = Ges beginnen und dabei jeden siebten Punkt verbinden, so erhalten wir den Quintenzirkel: Ges–Des–As–Es–B–F–C–G–D–A–E–H–Fis = Ges.

(e) Zwei verschiedene eingeschriebene, reguläre Sechsecke stellen die zwei ganztönigen Tonleiter dar.

Wenn wir endlich alle diese geometrische Konstruktionen vereinigen, so erhalten wir das Ornament am Bild 1 das ein günstiges, mathematisches Modell und ein Symbol für alle musikalische Inhalte (Tonleiter, Akkorde, Quintenzirkel u.ä.) im gleichtemperierten Tonsystem darstellt.

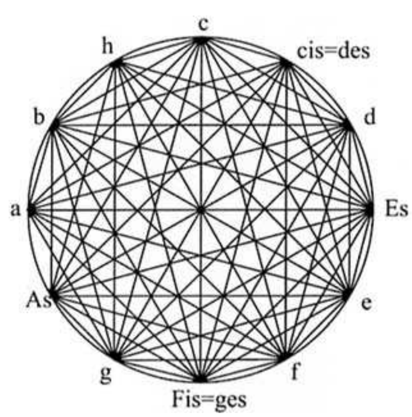

Bild 1

3. Eine kombinatorische Interpretation und die Zusammenhang mit dem Orakelbuch Jih-Djing

Im ganzen harmonischen Fonds der klassischen Tonalität spielt die Menge T_4 der diatonischen Vierklänge eine wichtige Rolle. Diese Vierklänge enthalten nur grosse und kleine Terzen. Dabei nützt man zB. die Bezeichnung (g, k, k) für den kleinen Dur–Vierklang, weil dieser Akkord eine grosse und zwei kleine Terzen enthält. Zu dieser Menge gehören die folgenden Typen der Akkorde:

1. grosser Dur-Vierklang (g, k, g)
2. kleiner Dur-Vierklang (g, k, k)
3. grosser Moll-Vierklang (k, g, g)
4. kleiner Moll-Vierklang (k, g, k)
5. halbverminderter Vierklang (k, k, g)
6. verminderter Vierklang (k, k, k)
7. übermässiger Vierklang (g, g, k).

Man ersieht einerseits die Anwesenheit der Kembinatorik und andererseits die Zusammenhang mit der Jin–Jang–Lehre.

Jin und Jang sind diejenige gegensätzlichen Ursubstanzen, durch deren gegenseitige Einwirkung aufeinander und fortgesetzte Abwandlung die stoffliche Welt hervorgebracht sein soll. Diese Lehre erscheint zuerst im Anhang Hi–Tsi des Jih-Djing (5. Jahrh vor Chr.) und wurde seitdem von den Kosmogonien fast aller philosophischen Systeme der Chinesen übernommen. Sie bildete zusammen mit der Lehre von den fünf Elementen die Grundlage für die Theorie der Divination, Astrologie und Medizin. Jin gilt als das dunkle, duldend–empfangende, weibliche und Jang als das lichte, tätig–schöpferische, männliche Prinzip. Das erste wird der Erde und das zweite dem Himmel gleichgesetzt. Ihre Symbole sind die gebrochene und die gerade Linie oder Tiger und Drache.

Wenn man das Buch der Wandlungen (Jih-Djing) als das Orakelbuch nützt, so enthält seine äussere Grundlage 8 Trigramme. Jeder Trigramm enthält weiterhin drei Linien. gebrochene oder gerade (Jin- und Jang-Linien). Man kann sie in einem Kreisordnung (Bild 2) darstellen.

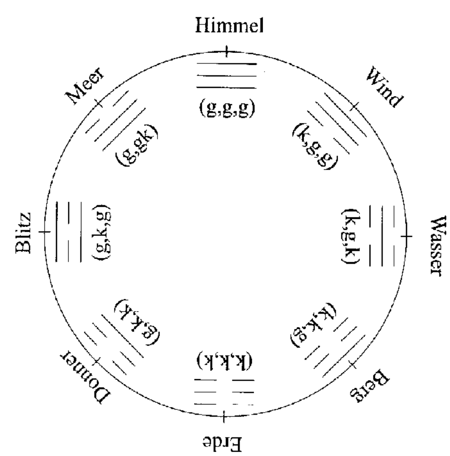

Bild 2

Schon am Anfang können wir unsere Trigramme als die Variationen mit Wiederholung von 2 Elementen (Jin und Jang-Linie) dritter Klasse

$$\overline{V}_n^k = \overline{V}_2^3 = 2^3 = 8$$

interpretieren. Andererseits betrachten wir parallel die sieben erwähnten, diatonischen Vierklänge. Die Grundbauelemente dieser Akkorde sind die grosse und kleine Terz. Die grosse Terz klingt fest, klar und stabil, mit Kraft und Energie. Demgegenüber klingt die kleine Terz weich und zart aber auch düster und kraftlos. Hier ersieht man eine starke Analogie mit dem männlichen–Jang (gerade Linie) und weiblichen–Jin (gebrochene Linie) Prinzip. Diese Analogie lässt sich am Bild 2 darstellen.

Die diatonischen Vierklänge lassen sich durch Ubereinanderlegung der Terzen (grosse und kleine) erhalten und man kann sie, ähnlich wie bei Jin und Jang, als die Variationen mit Wiederholung von 2 Elementen dritter Klasse $\overline{V}_2^3 = 8$ interpretieren. Es fehlt aber hier der achte Vierklang, der dem Trigramm "Himmel" entspricht. Warum ist es so?

Das Wort "Himmel" enthält zwei Attribute "unerreichbar" und "vollkommen". Diesem Trigramm soll der Akkord mit drei grossen Terzen entsprechen. Aber, durch Addition solcher 3 Terzen erhält man die Oktave. Dieser Akkord ist kein echter Vierklang, weil er nur drei Töne mit verschiedenen Namen enthält. Mit drei sukzessiven grossen Terzen kann man keinen Vierklang erreichen. Andererseits stellt die Oktave, als der Rahmen dieses Akkordes, das konsonanteste Musikintervall und die sgn. "vollkommene Konsonanz" dar. Auf dieser Art und Weise erhalten die Attribute "unerreichbar" und "vollkommen" des Trigramms "Himmel" durch die musikalische Interpretation, einen vollen Sinn.

4. Über die musikalische Interpretation der komplexen Zahlen

"Und Gott sprach: Es werde Licht! Und es war Licht ... und Gott schied das Licht von der Finsternis". Auch die weiteren Schöpfungsakte sind Polarisierungen im Sinne der zwei: Himmel und Erde, Wasser und Land. Vom Anfang der Welt bis zu den heutigen Tagen herscht im Universum das Dualitätsprinzip als ein Grundgesetz. In der chinesischen Zivilisation manifestiert es sich durch Jin und Jang. In der klassischen Musikharmonie stellen die grosse und kleine Terz die Grundbauelemente dar.

Jetzt wollen wir sehen, wo dieses Dualitätsprinzip in der Mathematik erscheint und wo es dem Terzenaufbau der Akkorde entspricht. Ein der zahlreichen Beispiele ist die musikalische Interpretation der komplexen Zahlen.

Am Anfang wollen wir eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Tönnen des gleichschwebend temperierten Systems und den ganzen Zahlen herstellen. Dieser Tonfloge im Rahmen einer Oktave entsprechen die folgenden Frequenzenzahlen

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c & des & d & es & e & f & fis & g & as & a & b & h & c' \\ 1 & \sqrt[12]{2} & \sqrt[12]{2^2} & \sqrt[12]{2^3} & \sqrt[12]{2^4} & \sqrt[12]{2^5} & \sqrt[12]{2^6} & \sqrt[12]{2^7} & \sqrt[12]{2^8} & \sqrt[12]{2^9} & \sqrt[12]{2^{10}} & \sqrt[12]{2^{11}} & 2 \end{array}$$

Diese Zahlenfolge stellt eine geometrische Progression mit der Quotient $q = \sqrt[12]{2}$ dar. Aber hier muss man das Weber-Fechnersche Gesetz erwähnen, dass die

Empfindungasstärke E proportional dem Logarithmus der zugehörigen Reizstarke R anwachse:

$$E = k \cdot \log R.$$

Ein Anstieg der Reizgrösse in geometrischer Progression bewirkt einen Anstieg der Empfindungsgrösse in arithmetrischer Folge. Hier entsprechen die Frequenzenzahlen den physikalischen Reizen und die Tonwerte den subjektiv empfundenen Tonhöhen.

Man kann über das Weber-Fechnersche Gesetz noch disskutieren. Aber das Fortschreiten entlang einer Oktavenfolge oder der hromatisch-temperierten Tonleiter empfinden wir tatsächlich als einen gleichwertigen Auf bzw. Abstieg, so dass in diesem Fall das Fechnersche Gesetz durchaus zutreffend ist.

Wenn man in diesem Sinne die Frequenzenfolge logaritmiert und die neuen Glieder mit 12 multipliziert, so erhält man die Folge

$$F_n = 12 \log_2 f_n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

So entspricht dem Ton c die Zahl 0, dem Ton des die Zahl 1, dem Ton d die Zahl 2 usw. Andererseits entsprechen der Bewegung vom Ton c nach unten die Frequenzenzahlen 1, $\sqrt[12]{2}^{\,-1}$, $\sqrt[12]{2}^{\,-2}$, . . . und ihre Logarithmen sind $-1, -2, -3, \dots$. Auf diese Art und Weise wird eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Tönen des gleichschwebend temperierten Systems und den ganzen Zahlen hergestellt.

Weiterhin betrachten wir 8 Typen der Dreiklänge in der klassichen Harmonie (natürlich mit dem Terzenaufbau). Sie entstehen durch Kombinieren der grossen, kleinen und verminderten Terzen.

a) Dur–Dreiklang (c–e–g); grosse Terz + kleine Terz = reine Quinte.

b) Moll–Dreiklang (c–es–g); kleine Terz + grosse Terz = reine Quinte.

c) verminderter Dreiklang (c–es–ges); kleine Terz + kleine Terz = verminderte Quinte

d) übermässiger Dreiklang (c–e–gis); grosse Terz + grosse Terz = übermässige Quinte

e) zweifach verminderter Dreiklang (c–eses–ges); verminderte Terz + grosse Terz = verminderte Quinte

f) hartverminderter Dreiklang (c–e–ges); grosse Terz + verminderte Terz = verminderte Quinte

g) dreifach verminderter Dreiklang (c–eses–geses); verminderte Terz + kleine Terz = zweifach verminderte Quinte

h) weichverminderter Dreiklang (c–es–geses); kleine Terz + verminderte Terz = zweifach verminderte Quinte

Mathematische Definition eines Dreiklanges unterscheidet sich von der musikalischen. Im mathematischen Sinne ist ein Dreiklang das gleichzeitige Ausführung von drei beliebiger Töne, wobei einige von ihnen auch gleich sein können (das unissono Spielen). Natürlich ist diese Situation in der Musikpaxis ganz möglich.

In der Gausschen komplexen Ebene interpretiert man jeden Punkt mit den ganzzahligen Koordinaten $z = x + iy$ als einen Dreiklang. Die erste Koordinate x stellt das erste und die zweite Koordinate stellt das zweite Intervall, die diesen Dreiklang formieren, dar. Das Wort "komplexe Zahl" weist auf einen Komplex oder Zusammenklang von zwei Komponenten mit der gleichen Wichtigkeit und Bedeutung, hin. Alle 8 erwähnte musikalische Dreiklänge lassen sich als Punkte im ersten Quadrant repräsentieren (Bild 3). Diese Interpretation nennt man "strukturell", weil jede Punkt und die entsprechende komplexe Zahl $z = x + iy$ mit ihren Komponenten die Struktur des Dreiklanges ausdrückt. Für die Ausführung eines Dreiklanges braucht man drei Musikinstrumente, und bei den Punkten auf der reellen Achse spielen das zweite und das dritte Instrument unissono (identisch) um die andere – imaginäre Komponente zu anulieren. Bei den Punkten auf der imaginären Achse spielen das erste und das zweite Instrument unissono, um die reelle Komponente zu anulieren. Im Koordinatenursprung spielen alle drei Instrumente unissono.

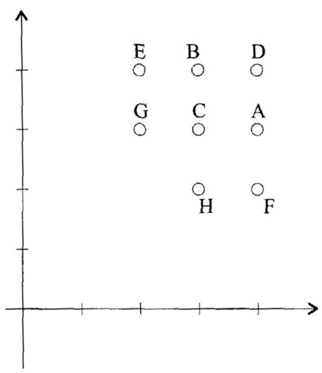

Bild 3

Im ersten Quadrant sind die beiden Komponenten positiv. Die komplexe Zahl $z = 4 + 3i$ repräsentiert den Dur–Dreiklang c–e–g. Man geht zuerst um die grosse Terz (+4=e) nach oben und weiterhin um die kleine Terz ($+3i = g$) wieder nach oben. So erhält man den Dur–Dreiklang c–e–g wobei das Tonalzentrum c am Auflang steht.

Im zweiten Quadrant ist die reelle Komponente negativ und die imaginäre ist positiv. Die komplexe Zahl $z = -4 + 3i$ formiert sich musikalisch so, dass man zuerst vom Tonalzentrum c um die grosse Terz (-4) nach unten geht, un so erhält man as. Weiterhin geht man wieder von c um die kleine Terz ($+3i$) nach oben (also bies es). So entsteht der Durdreiklang as–c–es wobei das Tonalzentrum c in der Mitte steht.

Im dritten Quadrant sind die beiden Komponenten negativ. Die komplexe Zahl $z = -4 - 3i$ formiert sich musikalisch so, dass man zuerst vom Tonalzentrum c um die grosse Terz (-4) nach unten geht, und so erhält man as. Weiterhin geht man von as um die kleine Terz ($-3i$) nach unten (also bis f). So entsteht der Moll–Dreiklang f–as–c.

Im vierten Quadrant ist die reelle Komponente positiv und die imaginäre ist negativ. Die komplexe Zahl $z = 4 - 3i$ repräsentiert den Moll–Dreiklang a–c–e. Man geht zuerst um die grosse Terz (+4 =e) nach oben und weiterhin um die kleine Terz von c nach unten ($-3i$ =a). So erhält man den Moll–Dreiklang a–c–e.

Alle vier Dreiklänge liegen am Bild 4, wo man noch eine interessante Tatsache bemerkt. Für die gegebenen komplexen Zahlen $z = x + iy$ die die Dur–Dreiklänge represäntieren, stellen die konjugiert–komplexe Zahlen $z = x - iy$ die entsprechenden parallelen Moll–Dreiklänge dar. Der komplexen Konjugation in der Mathematik (wobei z und $\bar{z}$ unabhängig sind) entspricht in der Musik die Beziehung Dur–Moll, also zwei unabhängige, komplementäre Haupttongeschlechte in der klassichen Musik.

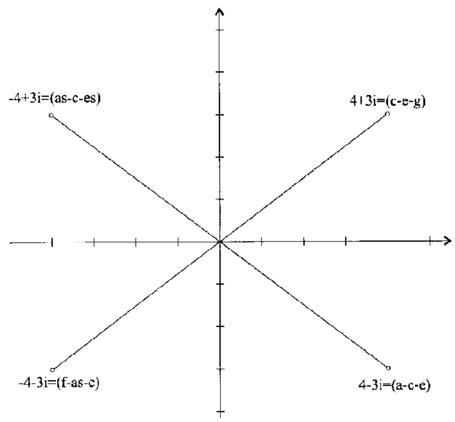

Bild 4

Es ist auch interessant, die komplexe Konjugation bei den anderen Dreiklängen der klassichen Harmonie zu betrachten (Bild 5).

Der Modul einer komplexen Zahl besitzt auch die musikalische Bedeutung. Den gleichen Modul besitzen alle solche Dreiklänge, die eine gleiche Kombination der Terzen (grosse, kleine und verminderte) darstellen, wobei die Reihenfolge dieser Terzen keine Rolle spielt. So liegen die Dur– und Moll–Dreiklänge auf einem Kreis (grosse und kleine Terz), auf anderem Kreis liegen zweifach – und hartverminderte Dreiklänge (grosse und verminderte Terz), auf dem dritten Kreis liegen dreifach und weichverminderte usw. (Bild 6).

Auch die Rechenoperationen mit den komplexen Zahlen haben die entsprechenden musikalischen Interpretationen. Wir betrachten als Beispiel die Multiplikation mit i.

Betrachten wir zB. den Dur–Dreiklang c–e–g, wem die komplexe Zahl $z = 4+3i$ entspricht (dabei ist das Tonzentrum der Ton c). Durch Multiplikation dieser Zahl mit i, i^2, i^3 und i^4 erzeugt man die Rotationen um 90° in der positiven Richtung. So erhält man die Scheitel eines Quadrats und diesen Scheiteln entsprechen die folgenden Dreiklänge

$$z = 4 + 3i = (\text{c–e–g})$$
$$z \cdot i = -3 + 4i = (\text{a–c–e})$$
$$z \cdot i^2 = -4 - 3i = (\text{f–as–c})$$
$$z \cdot i^3 = 3 - 4i = (\text{as–c–es})$$
$$z \cdot i^4 = 4 + 3i = (\text{c–e–g})$$

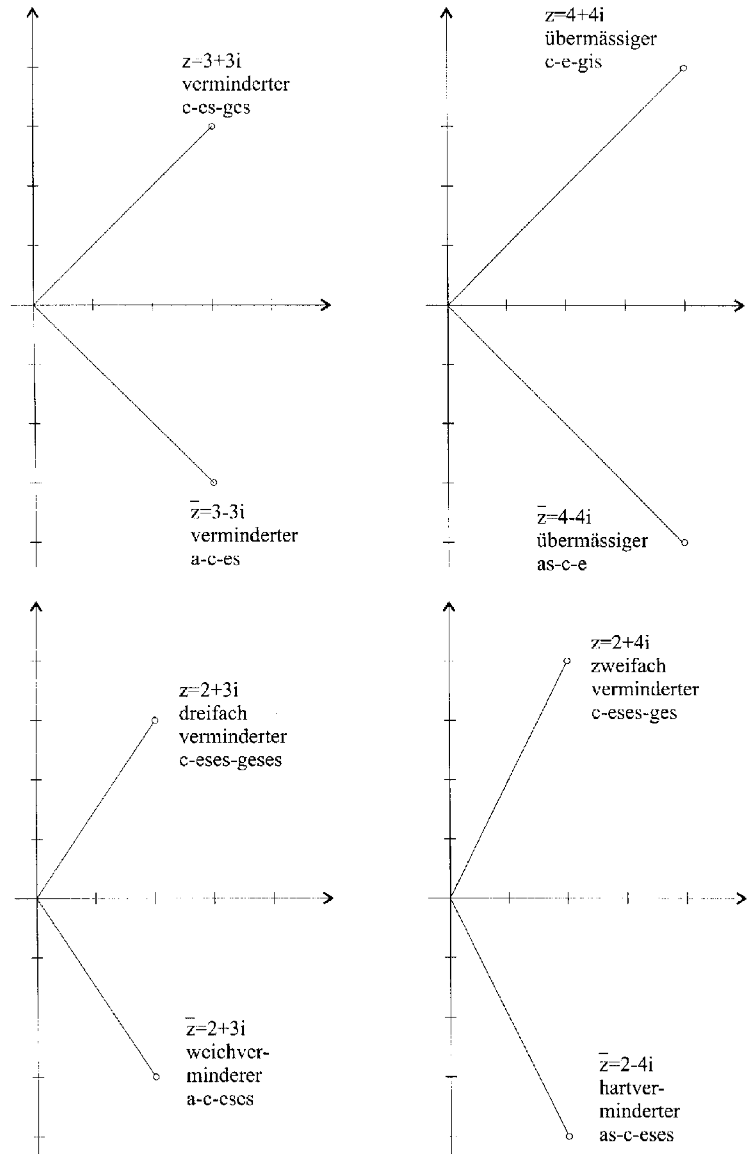

Bild 5

Hier sehen wir dass das musikalische Geshehen vollständig mit dem mathematichen koinzidiert. Parallel mit der Rotation des Punktes z, rotiert auf eine gleiche Art und Weise auch das Tonalzentrum c (Bild 7). Bei dem Punkt z ist es auf der ersten Stelle, bei $z \cdot i$ auf der zweiten und bei $z \cdot i^2$ auf der letzten. Weiterhin kehrt es bei $z \cdot i^3$ zurück in der Mitte und endlich bei $z \cdot i^4$ schliesst es die Kreisbewegung und kommt wieder auf die erste Stelle in die Grundakkordenlage.

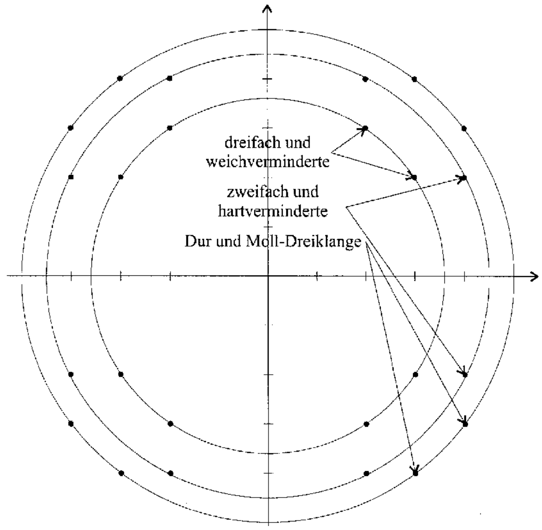

Bild 6

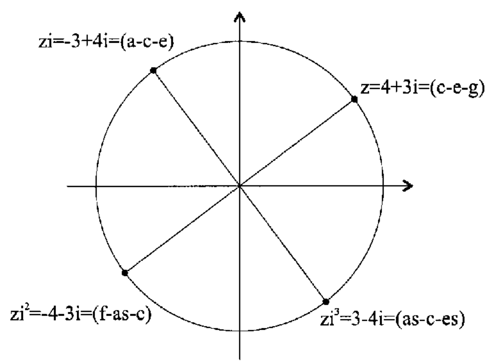

Bild 7

Gauss schrieb (Zitat von Gerhard Kowol – "Gleichungen" [3]): "Hat ein Objekt B in Bezug auf ein Objekt A die Eigenschaft, dass das Ersetzen von B durch A notwendig zur Folge hat, dass – A durch B ersetzt werden muss, so kann es als iA bzw. $-iA$ bezeichnet werden".

Dieses Verfahren begegnet man manchmal in den grösseren Rahmen in der Musik, wobei die zweite Instrumentengruppe die Melodie von der ersten übernimmt. Gleichzeitig spielt die erste Instrumentengruppe etwas veränderte Melodie der zweiten, was einen starken musikalisch-psyhologishen Effekt erzeugt.

LITERATUR

1. Despić D., *Tonalitätstheorie*, Akademija muzičkih umetnosti, Beograd, 1971.
2. Canak M., *Tonalitätstheorie im Lichte der mathematischen Musiktheorie*, Dissertation, Beograd, 1996.

3. Kowol G., *Gleichungen*, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1990.

Poljoprivredni fakultet, Nemanjina 6, 11080 Zemun, Serbia